

Классические постановки задач для уравнений математической физики

03.08.13
Л1

Обозначения:

E^n - n -мерное евклидово пространство

$x = (x_1, \dots, x_n)$ - его точки, $|x| = \sqrt{(x, x)}$

Мультииндекс

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - целые числа

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$D_\alpha f(x) = \partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ - производная

$\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ (знак умножить)

$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$

G - область (открытое множество) - это значит, есть что-то типа метрики (можно делать область) - в $\mathbb{R}^n$ бесконечно (нет метрики, нормы...)

$\bar{G}$ - замыкание области G (по норме того пространства, которое рассматриваем)

$S = \bar{G} \setminus G$ - граница области G

$U(x_0, r)$ - открытый шар с центром в точке x_0 и радиусом r

$S(x_0, r)$ - сфера...

Дифференциальное уравнение:

$F(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots) = 0$, если F - функция

дифференциальное уравнение, порядок которого равен n означает, что максимальный порядок производной, входящей в уравнение, равен n .

Линейное дифференциальное уравнение:

$$\sum_{k=0}^m \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} A_{i_1 \dots i_n}^k(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x) -$$

это частный случай диф. ур., тем более

изучать такие

$A(x), f(x)$ - некоторые функции, в зависимости от классов этих ф-ий $\Rightarrow$ массовое или обобщенное решение

В массовой постановке задачи

$$u(x) \in C^m(\mathbb{R}^n), f(x) \in C(\mathbb{R}^n)$$

Отличие в выборе класса функции. Сегодня выполняем именно массовые. Важно указать классы функций (класс ф-ий, удовлетворяющее - масс. задаче)

Уравнения 2-го порядка:

1) уравнение колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t)$$

$(x_1, \dots, x_n)$ - координаты в $\mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

$\rho = 1 \Rightarrow$ оператор Лапласа

$\rho = \text{const} \Rightarrow \text{const} \cdot \Delta u$, $(\operatorname{div} \operatorname{grad} \equiv \Delta)$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f \quad \text{гиперболический тип}$$

Обозначение:

волновой оператор

$$\square_a u = f, \quad \square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

2) уравнение диффузии

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t)$$

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f \quad \text{параболический тип}$$

3) стационарное уравнение

$$u = u(x)$$

$$\operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) + qu = F(x)$$

уравнение Пуассона
Лапласа

$$\Delta u = f$$

$$\Delta u = 0$$

элементарный тип

Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$

Символ дифференциального оператора

$$\sum_{k=0}^m \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} A_{i_1, \dots, i_n}^k(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = \hat{L}u$$

Символ - функция (x, z) : $\operatorname{Symb} \hat{L} =$

$$= \sum_{k=0}^m \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} A_{i_1, \dots, i_n}^k(x) z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n} = L(x, z)$$

Любому дифф. оператору можно поставить в соответствие символ (не обязательно: если переобозначить переменные $\rightarrow$ другой символ)

С помощью символа всегда можно точно определить тип уравнения; Кривая - оператор, без нее функция

Главный символ $\operatorname{Symb} \hat{L} = \sum_{i_1 + \dots + i_n = m} A_{i_1, \dots, i_n}^m z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$

Например, если $\hat{L} = \Delta$ в $\mathbb{R}^n$

$\operatorname{Symb} \hat{L} = z_1^2 + \dots + z_n^2$ - знакопеременная квадратичная форма $\rightarrow$

$\Rightarrow$ эллиптический тип

(если $z_1^2 + \dots + z_n^2 = a^2 \Rightarrow$ уравнение эллипсоида)

$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

$\{z_0 = \}$ $\operatorname{Symb} \hat{L} = z_1^2 + \dots + z_n^2$ в $\mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow$ кв. ф. не

(то кв. ф. < гипер-в.)

полного ранга $\Rightarrow$ параболический

у волнового $\operatorname{Symb} \hat{L} = z_0^2 - (z_1^2 + \dots + z_n^2)$ гиперболичес.

(кв. форма полного ранга не знакоопр.)

Эллиптический оператор

Опр: Оператор $\hat{L}$ называется эллиптическим в области G , если $\forall x \in G$ главный символ оператора

не обращается в нуль при $|z| \neq 0$
 (Определение не требует, чтобы оператор был
 2-го порядка в отношении от итерации. и
 парабол.)

Постановки задачи

Типы:

1) ур. колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\rho g \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t)$$

2) ур. диффузии

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho g \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t)$$

3) стационарные ур-ния

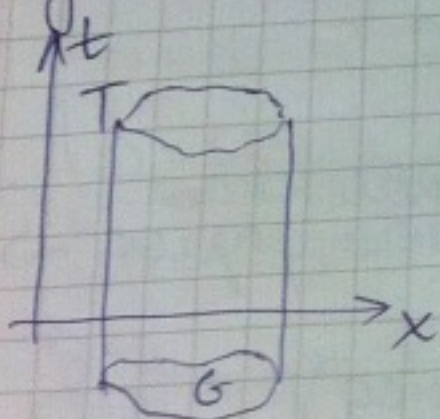
$$-\operatorname{div}(\rho g \operatorname{grad} u) + qu = f(x)$$

Область задания

для 1) и 2)

$$Q_T = G \times (0, T)$$

прямое
произведение



граница: $S \times [0, T]$

основания: $G \times 0, G \times T$

для 3) область задания - G
 для 1) и 2) можно ставить как задачу Коши
 (все условия при $t=0$), либо смешанные
 задачи (при $t=0$ и $x \in S$); для 3) возможны лишь
 граничные задачи. Постановки их

1) Задача Коши для уравнения 1) колебаний
 (ставим класс. задачу, находим порядок, иначе = 2)
 Это классическая постановка

$$\begin{cases} u(x) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0) \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^n) \\ u_1(x) \in C(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

или же надо, чтобы было достаточно

2) Задача Коши для уравнения 2) гиперболического

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u_0(x), u_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^n) \\ F(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^n) \\ u(x) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0) \end{cases}$$

(возможно C^1 -классич. то же)

{ производная снижает один порядок }

3) уравнение 3)

три типа условий, $u(x) \in C^2(G)$, $f(x) \in C(G)$

$$\textcircled{1} \begin{cases} u|_S = u_0, u_0 \in C^1(S) \text{ (на } \bar{S} \text{ меньше - условие)} \\ u(x) \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_1, u_1 \in C(S) \\ u(x) \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}) \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u \right)|_S = u_2, u_2 \in C(S) \\ u(x) \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}) \end{cases}$$

Классы из 12 имеют смысл, надо помнить, а не заучивать

17.09.13
12

Корректные задачи

Задача удовлетворяет следующим свойствам:

1) Решение существует

2) Реш. единственно

3) Решение непрерывно зависит от правых частей и начальных (граничных) условий

Такая задача называется корректной

Обычно ир-во нормированное (евклидово)
 Непр. зависимость от нач. данных

$$\{D_k\}, k=1, \dots, n$$

$$\{D_k\} \rightarrow D, \text{ то } \{u_k\} \rightarrow u$$

Пример

$$Lu = F, L: V_1 \rightarrow V_2, V_1, V_2 - \text{нормированные ир-ва, } L - \text{опер. лин. опер.}$$

$$\text{Корректность: } \ker L = 0$$

необходимое условие (недостаточное) $\Downarrow$ корр.

Для неогранич. оператора тоже можно.

Пример Адамара (некорр.)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} = \frac{1}{k} \sin kx$$

$$\text{Решение } u_k(x, t) = \frac{\sinh kt}{k^2} \sin kx, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{Оно } \exists!, \text{ но непр. зав. нет: } k \rightarrow \infty \quad \frac{1}{k} \sin kx \rightarrow 0$$

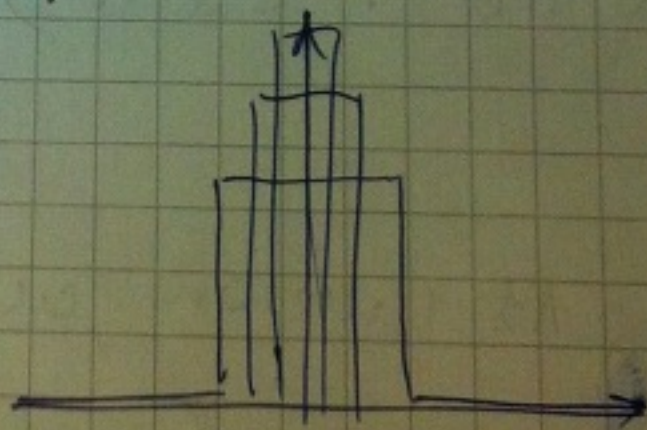
$$\text{Если } x \neq \pi j, \text{ то } u_k(x, t) = \frac{\sinh kt}{k^2} \sin kx \neq 0$$

$$\text{Если } \ker L \neq 0 \Rightarrow \text{зар. некорр.; образ не совн с } V_2 \Rightarrow \text{тоже некорр.}$$

Обобщенные функции

Надо выразить плотность массы, величина которой равна 1 в шаре радиуса ϵ .

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |x| \leq \epsilon \\ 0, & |x| > \epsilon \end{cases}$$



$$\text{Обозначим } \delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Это не определение $\delta(x)$, просто наш подход к ней
 Интеграл от плотности по скалярному объему
 равен массе, заключенной в этом объеме

$$\int_V \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \in V \\ 0, & 0 \notin V \end{cases}$$

Вышемыи следуют предель свойства функций $f_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ на пространстве непрерывных ф-ий.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

$\varphi \in C_0$. Т.к. $\varphi(x)$ является непрерывной ф-ей, то $\forall \varepsilon_0 > 0$

$\exists \delta > 0$. $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon_0$ при $|x| < \delta$ (это прямо отпр. непр.)

$$|\int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0)| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int_{|x| < \varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \leq \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x| < \varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx <$$

$$< \varepsilon_0 \cdot \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x| < \varepsilon} dx = \varepsilon_0$$

$(\delta, \varepsilon) = f(0)$ - это функционал на ф-ей типа

это не макс. произв., это действие лев. ф-ии на ф-ию
Сейчас рассм. пространство поупн. ($\Rightarrow$ пр-во отбиз. ^{дурно} _{исправлен})

Пространство основных ф-ий

Опр. Множество основных функций на $\mathbb{R}^n$ лев-во
бесконечно дифф. финитных функций.

Опр. Функция на $\mathbb{R}^n$ финитная, если её носитель компактен.

$\text{supp } f$ - носитель функции f . $x \in \mathbb{R}^n$

Носитель ф-ии на $\mathbb{R}^n$ замкнутое лев-во точек, на
которых функция не обращается в ноль.
(носитель замкнут, лев-во нулей открыто)

Подразумевается, что есть норма

Основная ф-ция принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и
обращается в ноль вне некоторого шара

Опр. Множество основных функций называется
пространством основных ф-ий, если на нём введена
структура линейного $\mathbb{R}$ -ва и сходимость, которая
задается следующим образом

Сходимость

послед. $\{f_n\}$ называется сходимостью ^{к нулю} в пр-ве основных
ф-ий, если

1) φ_n равномерно сход. своим произведением
 2) $\exists R > 0$, что $\text{supp } \varphi_k \subset \bar{U}_R$
 Пространство основных шар / φ -лей обобщ. D
 Свойства:

Опер. дифер. непрерывна в D
 D нел-то $\{\varphi_k\} \rightarrow 0$ в D при $k \rightarrow \infty$, тогда
 1) $\text{supp } \varphi_k \subset \bar{U}_R$ для всех k
 2) $\forall \alpha, \partial^\alpha \varphi_k \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}^n$ (проверим, что $\{\partial^\alpha \varphi_k\} \rightarrow 0$)
 $\Rightarrow \text{supp } \partial^\alpha \varphi_k \subset \bar{U}_R$ для всех k
 2) $\forall \alpha, \partial^\alpha (\partial^\beta \varphi_k) = \partial^{\alpha+\beta} \varphi_k \rightarrow 0$

Операции

1) лн. заменой переи. $\varphi(x) \rightarrow \varphi(Ax+b)$ - невр. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 $A\varphi_k$ невр. если $\varphi_k \rightarrow 0$, то $A\varphi_k \rightarrow 0$
 2) опер. умнож. на $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ - невр.
 $a(x) \cdot \varphi(x), \varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n), a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

2409B
 лекция 3

D -пространство основных функций

Обобщенные функции

Опр. Обобщ. φ -лей на лн. непрерывный функционал на $\mathcal{L}$ -вом основных функций (D)
 Обозначение $(f, g), g \in D$ - действие некоей φ -а на g

1. Лн. лн.

2. Непр. лн. φ -ля : $\forall \{\varphi_k\} \rightarrow 0$ в D верно, что
 $(f, \varphi_k) \rightarrow 0$ (числовое сх-во) (сх-во в D)

Опр. Пространством обобщ. φ -лей D' мы будем называть множество обобщ. φ -лей со структурой лн. простран-ва и скалярного, кот определяется аналогичным образом: $\{f_k\} \rightarrow 0$ в $D'(\mathbb{R}^n)$, если $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

$f \in D(\mathbb{R}^n)$, $g \in D(\mathbb{R}^n)$, то можем определить сумму:
 $f+g: (f+g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi)$
 $\lambda f: (\lambda f, \varphi) = \lambda(f, \varphi) \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

$\varphi \in D, \psi \in D \quad \varphi + \psi$ сложение поточечно естественно
 Если $\{\varphi_k\} \rightarrow 0$ в $D(\mathbb{R}^n)$, $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$, оп. сум. будет
 $f+g: (f+g, \varphi_k) = (f, \varphi_k) + (g, \varphi_k) \rightarrow 0$
 не знаем, не знаем и забудь.

Носитель обобщенной функции
 $\text{supp } \varphi(x)$, $\varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n)$ (замык. мн-ва точек,
 на кот. ф-ция не обращ. в нуль), но у обобщ. ф-ии
 нет понятия "значение в точке" $\Rightarrow$ не найдется

Опр: Обобщ. ф-ция $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ равна нулю в
 области G , если $(f, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in D(G)$

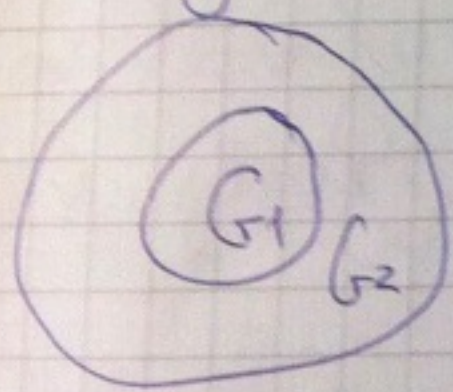
Обознач. $f=0, x \in G$ или $f(x)=0, x \in G$

Опр $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$. $f=g$ в области G , если $f-g=0$ в G
 если $f=g$ в $\mathbb{R}^n$, то $(f, \varphi) = (g, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

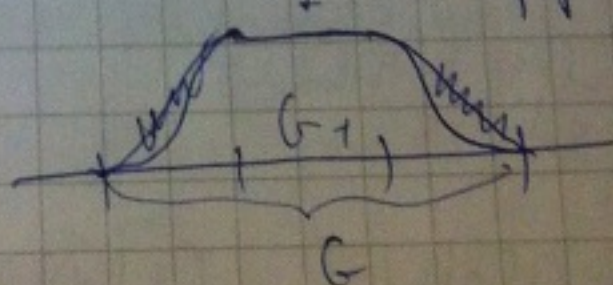
Некоторые очевидные свойства:

Если $g=0$ в области G , то она равна нулю и в
 некоторой окрестности G .

Лемма Если $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ равна нулю в окрестности
 каждой точки области G , то она равна нулю и в G .



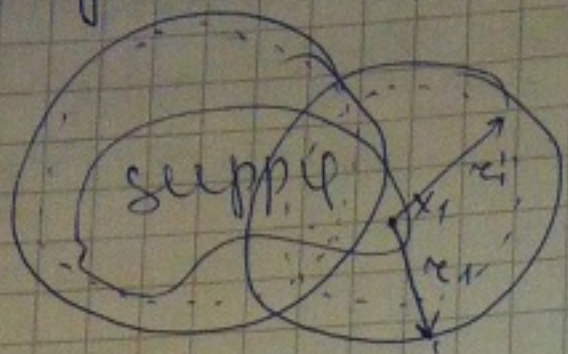
$G_1 \subset G_2$, то $\exists \eta(x) \in C^\infty(G_2)$, $\eta(x)=1$ при
 $x \in \bar{G}_1$, $\text{supp } \eta(x) \subset G_2$
 строим
 вспомогат.
 (где не η)



мажорант

Д-во: Покрытие G будем брать открытыми
 марками. Покажем, что $(f, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in D(G)$
 Фиксируем произвольную функцию $\varphi \in D(G)$

$\text{supp } \varphi \subset G$ - компактно
 число открытых шаров $U(x_k, r_k)$, $k=1, N$. В каждом
 шаре $r_k > 0$
 Уменьшим шары
 покрывающие $\text{supp } \varphi$



Возьмем осн. ф-ии
 $h_k(x) = \Delta$, $x \in U(x_k, r_k)$,
 $\text{supp } h_k \subset U(x_k, r_k)$

Обозн. $h(x) = \sum_{k=1}^N h_k(x)$, $\varphi_k = \varphi(x) \frac{h_k(x)}{h(x)}$
 Ясно, что $\varphi_k(x) \in D(U(x_k, r_k))$

покажем, что $h(x) \geq 1$. Ясно, что $\varphi_k(x) \in D(U(x_k, r_k))$
 $\sum_{k=1}^N \varphi_k(x) = \frac{\varphi(x)}{h(x)} \sum_{k=1}^N h_k(x) = \varphi(x)$

$$(f, \varphi) = (f, \sum_{k=1}^N \varphi_k) = \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) = 0$$

Пусть $f \in D'(\mathbb{R}^n)$

Опр. Нулевыми лн-вом две ф-ции f называется
 обнуление всех окрестностей точек, внутри кот. $f=0$

Обозн. O_f - нул. лн-во ф-ции f (она всегда открыто)

Опр. $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f = \mathbb{R}^n \setminus O_f$ - носитель

Если $\text{supp } f$ явл. компак. лн-вом, то говорим, что

ф-ция $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ явл. финитной.

Выводы

1) В любой области, лежащей вне носителя
 $\text{supp } f$, $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ она обращ. в нуль.

2) Носитель обобщ. ф-ции f состоит из тех и
 только тех точек, ни в одной окрестности которых
 f не обращ. в нуль.

Регулярные обобщенные функции.

Пусть $f(x)$ лн. непрерыв. в $\mathbb{R}^n$

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (*)$$

φ не финитна

Принимая к противоречию (просто, не н.в., она не невр. ф-ция) $\Rightarrow f(x) = 0$
 Следствие для того, чтобы регулярная обобщенная функция равнялась нулю необходимо и достаточно чтобы она равнялась нулю почти всюду.

Лемма Дюбуа - Реймона
 Если последовательность $\{f_k(x)\}$ локально равномерно сход. к функции $f(x)$ на компакте K , то она сходится к $f(x)$ в $D(\mathbb{R}^n)$

Доказ-во: $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (f_k, \varphi) = \int f_k(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int f(x) \varphi(x) dx = (f, \varphi)$ ■

6 Сиггулярные обобщенные функции

Пример $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$

Докажем, что δ -функция явл. сиггулярной обобщ. ф-ей.
 Не так, $\exists$ лок. инт. ф-ция $f(x)$: $\forall \varphi \in D$

$$\int f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

$$\varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n) \Rightarrow x_i \varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n)$$

$$\int f(x) x_i \varphi(x) dx = [x_i \varphi(x)]_{x=0} = 0 = (x_i f, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Получили, что лок. инт. ф-ция $x_i f = 0$ н.в. $\Rightarrow f = 0$ н.в.
 получили противоречие (т.к. $\varphi(0) \neq 0$) $\Rightarrow$ такой лок. инт. ф-ии, действ. как δ ■

$\Rightarrow$ Такая δ -функция - сиггулярн. обобщ. ф.

7 Функционал Сохоцкого в $\mathbb{R}^1 \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^1)$
 $(P \frac{1}{x}, \varphi) = \text{V.p.} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$
 главное значение

Докажем, что ф-ал Сохоцкого явл. обобщ. ф-ей
 линейность очевидна, докаж. келр. ф-ал

Лемма: $f_k \rightarrow 0$ в $D(\mathbb{R}^1)$, т.е. $\varphi_k = 0$ н.в.

$$|x| > R \text{ и } \partial^k \varphi_k(x) = 0$$

$$|(P \frac{1}{x}, \varphi_k)| = |V.p. \int \frac{\varphi_k(x)}{x} dx| = |V.p. \int \frac{\varphi_k(z) + x \varphi_k(z)}{x} dz|$$

Остаточный член в формуле Лагранжа

$$R_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\theta x), \quad (0 < \theta < 1)$$

Это условная запись $\varphi_k(z) + x \varphi_k(z)$ удобная для нас оценки; $z = z(x)$, лежащая внутри некоторого отрезка

$$\textcircled{5} \int_{-R}^R |\varphi'_k(z)| dx \leq 2R \max_{|x| < R} |\varphi'_k(x)| \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty$$

$$\underline{\text{Гл. 1}}: \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx = -i\pi \varphi(0) + V.p. \int \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$\underline{\text{Ф.в.}}: \exists \varphi(x) = 0 \text{ при } |x| < R$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \varphi(x) dx =$$

$$= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} dx = 0$$

$$\int_{-R}^R \frac{1}{x^2+\varepsilon^2} dx = \frac{2}{\varepsilon} \arctg \frac{R}{\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -2i\varphi(0) \arctg \frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx =$$

$$= -i\pi \varphi(0) + V.p. \int \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{1}{x+i0} \quad - \text{обозн.} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi \delta(x) + P \cdot \frac{1}{x} \quad - \text{формула Сократского}$$

$$\frac{1}{x-i0} = i\pi \delta(x) + P \cdot \frac{1}{x}$$

7

8

15.10.13
лекция 5

Дифференцирование обобщенных
функций и операции над ними

1) Линейная замена переменных

Пусть $f(x)$ - лок. интегр. в $\mathbb{R}^n$. $x = Ay + b$ - считаем
 это заменой перемен $\Rightarrow \det A \neq 0$
 $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ $(f(Ay+b), \varphi(y)) = \int f(Ay+b) \varphi(y) dy =$
 $= \frac{1}{|\det A|} \int f(x) \varphi(A^{-1}(x-b)) dx = \frac{1}{|\det A|} (f(x), \varphi(A^{-1}(x-b)))$

Определим замену перемен. следующим образом:
 $(f(Ax+b), \varphi) = (f, \frac{\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|})$ $f \in D'(\mathbb{R}^n)$

Пример $(\delta(x-x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0)$

2) Операции умножения обобщенной функции на ср.-инт. C^∞
 $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$, $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если $f(x)$ - лок. инт. ср.-инт.
 $(af, \varphi) = \int a(x) f(x) \varphi(x) dx \in \mathbb{R}$ // всегда $\exists$, т.к. φ -функция

$\odot (f, \varphi \cdot a)$

Пусть $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (af, \varphi) = (f, a\varphi) \leftarrow$ определение
 лок. инт. $\cdot$ лок. инт. $\neq$ лок. инт. $(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x}$ - не лок. инт. в $\mathbb{R}^1$)

Пример $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$1) a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$$

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0)$$

$$2) x \cdot p \frac{1}{x} = 1, \quad p \frac{1}{x} - \text{ф-ция Соболева}$$

$$(x p \frac{1}{x}, \varphi) = (p \frac{1}{x}, x\varphi) = \text{V.p.} \int \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int \varphi(x) dx = (1, \varphi)$$

3) Операции дифференцирования

Пусть $f \in C^p(\mathbb{R}^n)$, тогда $\forall d, d \leq p$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

$$(\partial^d f, \varphi) = \int \partial^d f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|d|} \int f(x) \partial^d \varphi(x) dx = (-1)^{|d|} (f, \partial^d \varphi)$$

Опр: Обобщенная производная функции $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой $(\partial^d f, \varphi) = (-1)^{|d|} (f, \partial^d \varphi)$, $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

(Имеется ли обобщ. производная для непрерыв. ф-нов?)

Утв: $\partial^d \varphi \in D'(\mathbb{R}^n)$ если $f \in D'(\mathbb{R}^n)$

Д-во: очевидность

Непрерывность. $\{f_k\}$ - послед. сход. к нулю в $D(\mathbb{R}^n)$

$(\partial^d f, \varphi_k) = (-1)^{|d|} (f, \partial^d \varphi_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Непр-ть в $D'(\mathbb{R}^n)$ доказана

Свойства

1. Операции дифференцирования непрерывны в $D'(\mathbb{R}^n)$
 $\underline{D}$: $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ докажем, что если $f_k \rightarrow 0$ в $D'(\mathbb{R}^n)$, то
 $\partial^\alpha f_k \rightarrow 0$ в $D'(\mathbb{R}^n)$
 $(\partial^\alpha f_k, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f_k, \partial^\alpha \varphi) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$

2. Каждая обобщенная функция бесконечно дифференцируема
 Если $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, то $\partial^\alpha f \in D'(\mathbb{R}^n)$

Следует из определения

3. Результат дифференцирования обобщ. ф-ции не зависит от порядка дифференцирования.

$$\partial_1(\partial_2 f) = \partial_2(\partial_1 f)$$

$$\underline{D}$$
: $(\partial_1(\partial_2 f), \varphi) = (f, \partial_2(\partial_1 \varphi)) = (f, \partial_1(\partial_2 \varphi)) = (\partial_2(\partial_1 f), \varphi)$

$$\Rightarrow \partial^\alpha \partial^\beta f = \partial^\alpha (\partial^\beta f) = \partial^\beta (\partial^\alpha f)$$

4. Формула Лейбница

$$(d \cdot \beta)' = d' \beta + \beta' d, \quad d, \beta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Мы не рассм. обобщ. ф. обобщ. ф., а только C^∞ обобщ. ф.

Пусть $d(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial d f}{\partial x_1}, \varphi \right) &= - \left(d f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = - \left(f, d \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = - \left(f, \frac{\partial d \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial d}{\partial x_1} \varphi \right) = \\ &= - \left(f, \frac{\partial d \varphi}{\partial x_1} \right) + \left(f, \frac{\partial d}{\partial x_1} \varphi \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} d, \varphi \right) + \left(\frac{\partial d}{\partial x_1} f, \varphi \right) = \left(d \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial d}{\partial x_1} f, \varphi \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} d(x) f(x) = \frac{\partial d}{\partial x} f + d \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f \in D', d \in C^\infty \quad \text{— Ф. Лейбница}$$

Замечание

Если $f(x) = 0$ в G , то $\partial^\alpha f = 0$ в G .

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$$

5. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x)$, состоящий из лок. инт. ф-ций $u_k(x)$ сходится равномерно на $\forall$ компакте, то его можно почленно дифференцировать $\forall$ членов ряда (как обобщенную функцию) и почленный ряд будет сходиться в $D'(\mathbb{R}^n)$

$$S_p = \sum_{k=1}^p u_k(x) \Rightarrow S(x), \quad |x| < R, \quad p \rightarrow \infty, \text{ т.е. } S_p \Rightarrow S \text{ в } D'(\mathbb{R}^n)$$

$$\partial_d S_p = \sum_{k=1}^p \partial_{a_k} \rightarrow \partial_d S \text{ в } D'$$

Пример $|a_k| \leq A|k|^m + B$ $\rightarrow$ ряд сходится в D' $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$, где $a_k = \frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx}$ - сход. ряд на $\mathbb{R}$ компакте

Рассмотрим

$\Rightarrow$ ряд сходится в D'

Примеры обобщённых производных

1) Плотность зарядов

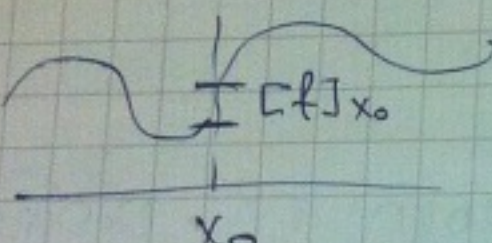
$(\frac{1}{\varepsilon} \delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \delta(x))$ при $\varepsilon \rightarrow +0$

но сути $\leftarrow \delta'$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\frac{1}{\varepsilon} \delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \delta(x), \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} [\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)] = \varphi'(0) =$$

$$= (\delta, \varphi') = -(\delta', \varphi)$$

2) Обобщённая производная для разрывной функции $f(x): f(x) \in C^1(x \leq x_0), f(x) \in C^1(x \geq x_0)$



обозначим:

$$[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0) \text{ - величина разрыва}$$

$\{f'\}$ - классическая производная

$$f' = \{f'\} + [f]_{x_0} \delta(x-x_0)$$

Докажем, что

классич. произв. в x_0 не существует, т.к. там она как обобщ. ф-ция. А о её значении в точке сигнализировать невозможно.

$$\text{Д-во: } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1) \quad (f', \varphi) = -(f, \varphi') = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx =$$

$$= - \int_{-\infty}^{x_0} f(x) \varphi'(x) dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx =$$

$$= - f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{x_0} + \int_{-\infty}^{x_0} \{f'(x)\} \varphi(x) dx - f(x) \varphi(x) \Big|_{x_0}^{+\infty} + \int_{x_0}^{+\infty} \{f'(x)\} \varphi(x) dx$$

$$= - f(x_0-0) \varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \{f'(x)\} \varphi(x) dx + f(x_0+0) \varphi(x_0) =$$

$$= [f]_{x_0} \varphi(x_0) + (\{f'(x)\}, \varphi) = ([f]_{x_0} \delta(x-x_0) + \{f'(x)\}, \varphi)$$

Пример

$$y = \Theta(x), \quad \Theta = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\Theta' = 0 + 1 \delta(x), \quad \Theta' = \delta$$

22.10.13
лекция 6

Обобщённое правую для разрывной функции в многомерном случае

$$f \in C^1(x \leq x_0), f \in C^1(x > x_0)$$

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \Gamma f|_{x_0} \delta(x-x_0) - \text{нагрузки на границе}$$

будем в многомерном случае, разрыв через поверхность

поверхность S , кусочно-гладкая

Формула Остроградского (выделим)

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$P, Q, R \in C^1 \bar{V}$, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S

$$\iint_S P \cos(n, x_k) dS = \int_G \frac{\partial P}{\partial x_k} dx \quad \leftarrow \text{частный случай } (\cos \beta = \cos \gamma = 0)$$

$$\int_G P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = \int_G \frac{\partial}{\partial x_k} (PQ) dx \neq \int_G Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx \quad - \text{просто погрешка}$$

$$\int_G P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx \neq - \int_G Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx + \iint_S PQ \cos(n, x_k) dS \quad - \text{Ф-ла интегрирования по частям в многомерном случае}$$

Простой слой

$\mu(x)$ - непрерывная функция. Определим обобщённую функцию $\mu(x) \delta_S$, как $(\mu \delta_S, \varphi) = \iint_S \mu(x) \varphi(x) dS$

$$\mu(x) \delta_S \in D'(\mathbb{R}^n), \quad \mu \delta_S(x) = 0 \quad \forall G \text{ при } G \not\supset S, \quad G \in \text{supp } \varphi$$

$\mu \delta_S$ - простой слой (циркулярная обобщ. ф-ция)

$\mu(x)$ - плотность простого слоя

Двойной слой

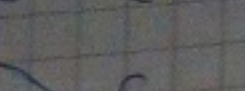
Обозначение: $(-\frac{\partial}{\partial n}(\sigma \delta_S))$, σ - к-ль. ф-ция, которая называется плотностью двойного слоя

$$(-\frac{\partial}{\partial n}(\sigma \delta_S)) = \iint_S \sigma(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} dS \quad \forall \varphi \in D$$

$$\text{supp}(-\frac{\partial}{\partial n}(\sigma \delta_S)) \subset S$$

G - область с кусочно-гладкой границей $S, x \in \bar{G}$

$f \in C^1(\overline{G}) \cap C^1(G_1)$, $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ - дополнение

$f \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$

 G_1 Докажем, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S \cos(n, x_i) \delta_S$$
 классиф. краевых
 $[f]_S$ - скачок функции f через поверхность S
 $[f]_S(x) = \lim_{x' \rightarrow x, x' \in G_1} f(x') - \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \in G}} f(x'), x \in S$

D: $\forall \varphi \in D$

b: $\forall \varphi \in D$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\int_G f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = -\int_G f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} - \int_{G_1} f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}$$
$$= \int_G \varphi(x) \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} dx - \iint_S \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \in G}} f(x') \varphi(x') \cos(n, x_i) ds +$$

p.f. -, crail +, r.k. pa no
uofman

$$+ \int_{G_1} \varphi(x) \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} dx + \iint_S \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \rightarrow G_1}} f(x') \varphi(x') \cos(n, x_i) dx =$$

$$= \int_G \varphi(x) \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} dx + \iint_S [f_{g_i}]_s \cos(n x_i) \varphi(x) ds =$$

$$= \left(\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \right\} + [F]_S \cos(n \cdot x_i) \delta_{S, \varphi} \right) \quad \text{T.P.} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \right\} + [F]_S \cos(n \cdot x_i) \delta_{S, \varphi}$$

Вторые производные

$$f \in C^2(\bar{G}) \cap C^2(G_1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} ([f]_s \cos(n x_i) \delta_s)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} + \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_s \cos n x_j \delta_s$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right]_s + \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_s \cos(n x_j) \delta s + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left[f \right]_s \cos(n x_i) \delta s \right)$$

$$\underline{y_{hub}} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} ([f]_s \cos(wx_i) \delta_s) - \frac{\partial}{\partial w} ([f]_s \delta_s)$$

Der. box: $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} [f]_S \cos(n x_i) \delta_{S, \varphi} \right) = - \sum_{i=1}^n [f]_S \cos(n x_i) \delta_{S, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} =$

$$= - \sum_s \int \left[f \right]_s \cos(n x_i) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} ds = - \int \left[f \right]_s \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos(n x_i) ds =$$

$$= - \int \left[f \right] \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \left(\frac{\partial}{\partial n} \left(\left[f \right]_s ds \right), \varphi \right)$$

$$\sum \left[f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] \cos n x_i ds = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_s ds$$

Обобщ. опер. Лапласа ($t=0, x \in G_1$)

$$\Delta f = \{ \Delta f \} + \frac{\partial}{\partial n} \left[f \right]_s ds + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_s ds$$

$$\Delta f = \{ \Delta f \} - \frac{\partial}{\partial n} (f ds) - \frac{\partial f}{\partial n} ds \quad \leftarrow \int (\Delta \varphi - \Delta f \varphi) dx$$

$$\int (\Delta f, \varphi) - (\{ \Delta f \}, \varphi) = \int \Delta \varphi - \Delta f \varphi dx = \left(- \frac{\partial}{\partial n} (f ds), \varphi \right) +$$

$$+ \left(- \frac{\partial f}{\partial n} ds, \varphi \right) = \int \left[f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} \varphi \right] ds$$

6
11

05.11.13
лекция 4

Трансформирование и свёртка обобщённых функций

1) Трансформирование обобщённых функций

Пусть $f(x), g(y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ - локально интегрируемые,
тогда ф-ция $f(x) \cdot g(y)$ также является локально интегр. $\mathbb{R}^{n+m}$

Рассм. регулярную обобщ. ф-цию $f(x) \cdot g(y)$ в нр-ве $D(\mathbb{R}^{n+m})$

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y)) = \int f(x) \cdot g(y) \cdot \varphi(x, y) dx dy = \int f(x) \int g(y) \varphi(x, y) dy dx$$

$$(\text{по второму теореме Фубини}) = \int g(y) \int f(x) \varphi(x, y) dx dy =$$

$$\in (f(x), (g(y), \varphi(x, y))) \quad \text{или} \quad (g(y), (f(x), \varphi(x, y)))$$

Далее пусть $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n), g(y) \in D'(\mathbb{R}^m), \varphi \in D(\mathbb{R}^{n+m})$, тогда

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))) \text{ операция свёртка}$$

применяется к трансформации обобщ. функций.

Докажем, что $(g(y), \varphi(x, y)) \in D(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{d}{dx} (g(y), \varphi(x, y)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(g(y), \varphi(x + \Delta x, y)) - (g(y), \varphi(x, y))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (g(y), \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x}) = (g(y), \frac{d}{dx} \varphi(x, y)) \in C$$

Вывод: $g(x) \cdot f(y) \in D'(\mathbb{R}^{n+m})$, т.е. св. обобщ. ф-ция

Свойства:

1. Операция прямого произведения (f.g) обн. линейной и непрерывной по f и g
 или: $[\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2] \cdot f = \lambda_1 g_1 \cdot f + \lambda_2 g_2 \cdot f$ - прямое ал-е вып-е
 непрерыв. $f_k(x) \cdot g(y) \rightarrow 0$ если $f_k(x) \rightarrow 0$ в $D'(\mathbb{R}^n)$

$(f_k(x) \cdot g(y), \varphi(x, y)) = (f_k(x), (g(y), \varphi(x, y))) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$

2. Ассоциативность
 $f \in D'(\mathbb{R}^n), g \in D'(\mathbb{R}^m), h \in D'(\mathbb{R}^k), \varphi \in D(\mathbb{R}^{n+m+k})$
 $[f(x) \cdot g(y)] \cdot h(z) = f(x) \cdot [g(y) \cdot h(z)]$
Д. $(f(x) \cdot [g(y) \cdot h(z)], \varphi) = (f(x), (g(y) \cdot h(z), \varphi(x, y, z))) =$
 $= (f(x), (g(y), (h(z), \varphi))) = (f(x) \cdot g(y), (h(z), \varphi)) =$
 $= ([f \cdot g] \cdot h, \varphi) \quad \square$

3. Коммутативность $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n), g(y) \in D'(\mathbb{R}^m)$
 $f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x)$
Д. $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n+m})$

Докажем сначала для линейного: $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i(x) v_i(y)$
 $u_i(x) \in D(\mathbb{R}^n), v_i(y) \in D(\mathbb{R}^m)$
 $(f(x) \cdot g(y), \varphi) = (f, (\sum_{i=1}^N u_i(x) (g, v_i))) = \sum_{i=1}^N (f, u_i) (g, v_i) =$
 $= (g, \sum_{i=1}^N v_i (f, u_i)) = (g \cdot f, \varphi)$

Ф-ции вида $\sum v_i(x) u_i(y)$ образуют всюду плотное мн-во в $D(\mathbb{R}^n)$ { без док-ва }

(след. из теор. о приближении любой ф-ции полиномами) $\square$

4. Операция дифференцирования прямого произведения
 $\partial_x^\alpha [f(x) \cdot g(y)] = \partial_x^\alpha f(x) \cdot g(y)$

5. Умножение на $\lambda(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\lambda(x) [f(x) \cdot g(y)] = \lambda(x) f(x) g(y)$

↑ разные виды произведений
 $\{ x \frac{1}{x} = 1 \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \leftarrow \text{так не может}$

$(x \frac{1}{x}, \varphi(x)) = (1, \varphi(x)) \quad \int g(x) \cdot x \cdot \varphi(x) dx = \int \varphi(x) dx$
 $\int (g(x) \cdot x - 1) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^1)$

$\Rightarrow g(x) \cdot x = 1$ почти всюду

$g(x) = \frac{1}{x}$ н.в. на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

6. fg в D'

$f(x) \in D'(\mathbb{R}^n), g(y) \in D'(\mathbb{R}^n)$

$$(f \cdot g)(x+h, y) = f(x+h) \cdot g(y)$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (f \cdot g)(x+h, y), \varphi &= (f(x) \cdot g(y), \varphi(x-h, y)) = \\ &= (g(y), (f(x), \varphi(x-h, y))) = \\ &= (g(y), (f(x+h), \varphi(x, y))) = (g(y) f(x+h), \varphi(x, y)) \end{aligned}$$

прямое утверждение всегда выполняется

11
12

Свёртка обобщённых функций

Сначала пусть $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n), g(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ — локально интегрир. ф-ции

$$f * g = \int f(y) g(x-y) dy = \int g(y) f(x-y) dy$$

будем считать, что свёртка функций $|f(x)|$ и $|g(x)|$ существует и является лок. инт.

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \int (f * g)(z) \varphi(z) dz = \int \left[\int g(y) f(z-y) dy \right] \varphi(z) dz = \\ &= \int g(y) \left(\int f(z-y) \varphi(z) dz \right) dy = \int g(y) \int f(x) \varphi(x+y) dx dy \end{aligned}$$

$$(f * g, \varphi) = \int f(x) g(y) \varphi(x+y) dx dy$$

Обозначение

$$h(x) = |f| * |g| = \int |f(y)| |g(x-y)| dy \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

Лемма, что $h(x) \geq |(f * g)|$

Существование свёртки

(достаточные условия)

1) Если f и g — лок. интегрир. ф-ции f и g — обобщённые

2) Пусть $\text{supp } g \subset U$

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx = \int_{U_g} |g(y)| \int_{U_R} |f(x-y)| dx dy \leq \int_{U_g} |g(y)| dy \int_{U_{g+R}} |f(z)| dz$$

2) $f \in D'(\mathbb{R}^1), g \in D'(\mathbb{R}^1)$

Все ф-ции обращаются в ноль при $x < 0$. Тогда $\int_{-R}^R h(x) dx = \int_{-R}^R \int_0^x |g(y)| \cdot |f(x-y)| dy dx = \int_0^R |g(y)| dy \int_0^R |f(x)| dx = \dots$

Сходимость последовательности $k \in \mathbb{N}$

$\{ \eta_k \}$ - послед. основн. функций $\eta_k \in D(\mathbb{R}^n)$
 Будем говорить, что послед. $\{ \eta_k(x) \}$ сход. к 1 в $\mathbb{R}^n$, если

- 1) $\forall$ компакт K найдётся такой номер N , что при $n > N$ ф-ии $\eta_n(x) = 1$ на K
- 2) $\eta_k(x)$ равна. суж. в $\mathbb{R}^n$ вместе со всеми своими производными $|\partial^\alpha \eta_k(x)| < C_\alpha, x \in \mathbb{R}^n$

Такая послед. в D не сходится (послед. не обяз.)

12.11.13 лекция 8
 Свёртка обобщённых функций
 Две ф-ии f, g - лок. инт. ф-ии $h = f \cdot g$ суж. и лок. инт. $\Rightarrow (f * g, \varphi) = \int \int f(x) g(y) \varphi(x+y) dx dy$ - было

Опр: Послед. основн. ф-ий $\{ \eta_k \}, \eta_k \in D(\mathbb{R}^n)$ сход. к 1 в $\mathbb{R}^n$ если:

- 1) $\forall$ компакт $K \exists N > 0: \forall n > N \eta_n(x) = 1$ при $x \in K$
 - 2) Все $\eta_k(x)$ вместе со всеми своими производными равн. суж.
- Ясно, что

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x+y)) \text{ следует из того, что ф-ии } f(x)g(y) \varphi(x+y) \text{ инт.}$$

$$\int \int |f(x) g(y) \varphi(x+y)| dx dy = \int \int |f(x) g(z-x) \varphi(z)| dz dx \leq \int |h(z)| |\varphi(z)| dz < \infty$$

$$\int \int f(x) g(y) \varphi(x+y) dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \int f(x) g(y) \eta_k(x, y) \varphi(x+y) dx dy$$

$\eta_k(x, y)$ сход. к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$

Опр. свёртки

Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$. Будем говорить, что их произведение $f \cdot g$ допускает продолжение на ф-ии вида $\varphi(x+y), \varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n)$, если $\forall$ послед. $\{ \eta_k(x, y) \}, \eta_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$ сход. к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$ существует предел числовой послед.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y)) = (f(x)g(y), \varphi(x+y))$$

Пр: $f \in D'(\mathbb{R}^n), g \in D'(\mathbb{R}^n)$

$$(f * g, \varphi) = (f(x)g(y), \varphi(x+y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y))$$

Если $f \cdot g$ допускает продолжение на функции $\varphi(x+y)$, то свёртка существует.

Свойства:

$$1) f \in D'(\mathbb{R}^n)$$

$$f * \delta = \delta * f = f$$

$$\Phi: \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \{\eta_k\} \rightarrow 1 \text{ в } \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \eta_k(x, 0)\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ в } D(\mathbb{R}^n)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \delta(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x), \eta_k(x, 0)\varphi(x)) = (f, \varphi)$$

$$2) \text{ линейность } f * g \text{ относительно } f \text{ и } g$$

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * g = \lambda_1 f_1 * g + \lambda_2 f_2 * g$$

$$3) \text{ Свёртка не является непрерывной операцией из } D' \text{ в } D'$$

$$\text{Пример: } \delta(x-k) \rightarrow 0 \text{ в } D'(\mathbb{R}^1)$$

$$1 * \delta(x-k) = 1$$

$$4) \text{ коммутат.}$$

$$\text{Если } \exists f * g, \text{ то } f * g = g * f$$

$$\Phi\text{-во: } (f * g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f \cdot g, \eta_k(x, y)\varphi(x+y)) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} (g \cdot f, \eta_k(x, y)\varphi(x+y)) = (g * f, \varphi) \quad \blacksquare$$

$$\text{Умб: } f * g \in D'(\mathbb{R}^n) \text{ если она существует}$$

$$\Phi\text{-во: } \eta_k(x, y) \text{ - носитель, экр. в } \mathbb{R}^{2n}$$

$$(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y)) \text{ расщ. носитель } \varphi_m(x):$$

$$\varphi_m \rightarrow 0 \text{ в } D(\mathbb{R}^n); \text{ носитель } \eta_k(x, y)\varphi_m(x+y) \rightarrow 0 \text{ в } D(\mathbb{R}^{2n})$$

Функционал $f \cdot g$ есть непрерывный

$$(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi_m(x+y)) \text{ экр. к нулю } \forall k$$

Последний носитель непрерыв. ф. лоб. Она в $D'(\mathbb{R}^n)$ будет

сходиться к непрерывному функционалу. $\blacksquare$

$$\text{Пример } f(x) = 1, g(x) = \Theta(x)$$

$$(1 * \Theta, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\Theta \cdot 1, \eta_k(x, y)\varphi(x+y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k(x, y)\varphi(x+y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) dz$$

дифференцируемость свёртки

Умб. Если $f * g$ существует, то существует $\partial^2 f * g$ и $f * \partial^2 g$, причем

$$\partial^2 f * g = f * \partial^2 g = \partial^2(f * g)$$

Доказательство. Пусть оператор ∂_j свёртки κ в $\mathbb{R}^{2n}$, тогда

$$\begin{aligned} \partial_j(f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x+y)) - \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \varphi(x+y)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), (\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}) \varphi(x+y)) - \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k \varphi(x+y)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \cdot g(y), \eta_k \varphi(x+y)) + (f * g, \varphi) - (f * g, \varphi) = \partial_j(f * g, \varphi) \end{aligned}$$

Замечание. Из того что $g * f$ существует, не следует, что $\partial^2 g * f$ и $f * \partial^2 g$ не существуют.

Пример. $\theta' * 1 = \delta * 1 = 1$, $\theta * 1' = \theta * 0 = 0$

Пример. $(\theta * \delta') * 1 = \theta' * 1 = 1$, $\theta * (\delta' * 1) = \theta * 0 = 0$

Нем ассоциативности свёртки

Свойства свёртки

Если $\exists f * g$, то $\exists f(x+h) * g(x)$, причем $f(x+h) * g(x) = (f * g)(x)$

Доказательство. Пусть $\eta_k(x, y) \rightarrow 1$ в $\mathbb{R}^{2n}$, тогда $\eta_k(x+h, y) \rightarrow 1$ в $\mathbb{R}^{2n}$

$$(f * g)(x+h) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x+h) \cdot g(y), \eta_k(x+h, y) \varphi(x+h+y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x+h) * g(y), \varphi) = (f * g)(x)$$

Нем линейности по каждому сомножителю

Дополнительные условия существования свёртки

19.11.13

неизвестно

$f \in D'(\mathbb{R}^n)$, $g \in D'(\mathbb{R}^n)$

$(f * g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f \cdot g, \eta_k(x, y) \varphi(x+y))$, $\eta_k(x, y) \rightarrow 1$ в $\mathbb{R}^{2n}$, тогда

свёртка определена (если $\exists$ ест.)

Теорема $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ - произвольная обобщённая функция, $g \in D'(\mathbb{R}^n)$ - обобщ. ф-ция с компактными носителями, тогда $f * g$ существует в $D'(\mathbb{R}^n)$ и определяется формулой

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y) \varphi(x+y)), \quad \varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n), \eta(x) \in D(\mathbb{R}^n) \text{ и равно } 1 \text{ в некоторой окрестности } \text{supp } g$$

Д-во. Пусть $\text{supp } g \subset U_R$, η -ф-ция из $D(\mathbb{R}^n)$ равная 1 в некоторой окрестности $\text{supp } g$ и $\eta(y)$ равна нулю вне U_R .

$$\varphi \in D(\mathbb{R}^n): \text{supp } \varphi \subset U_A$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta(y) \eta_k(x, y) \varphi(x+y) = \eta(y) \varphi(x+y)$$

$$\eta(y) \varphi(x+y) \in D(\mathbb{R}^{2n})$$

$$\{x, y\}: |x+y| \leq A, |y| \leq R \Rightarrow \text{supp } \eta(y) \varphi(x+y)$$

Замечание $g = \eta g$

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x+y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \eta(y) g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x+y)) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y) \varphi(x+y))$$

Выпавшими во свойства прямого произведения:

ассоциативность, ассоциативность, непрерывность по обоим

свёрточными множителями т.е. если $f_k \rightarrow 0$ в $D'(\mathbb{R}^n)$, то

$g * f_k \rightarrow 0$ в $D'(\mathbb{R}^n)$

Обозначим $D_+(\mathbb{R}^1)$ - множество обобщ. ф-ий из $D'(\mathbb{R}^1)$, которые обращаются в нуль при $t < 0$.

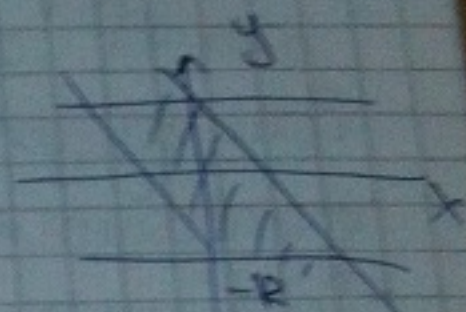
Теорема Пусть $f, g \in D_+(\mathbb{R}^1)$, тогда свёртка $f * g \in D_+(\mathbb{R}^1)$

$$(f * g, \varphi) = (f(t) \cdot g(\tau), \eta_1(t) \eta_2(\tau) \varphi(t+\tau)),$$

$\eta_1(t), \eta_2(\tau)$ - любые функции, принадлежащие к классу $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ и равные 1 в окр. $[0, +\infty)$ и равные нулю при достаточно больших отрицательных t . // (не функции.)

Д-во: $\varphi(t) \in D(\mathbb{R}^1)$, $\eta_k(x, y) \rightarrow 1$ в $\mathbb{R}^2$

$$\eta_1(t) \cdot \eta_2(\tau) \eta_k(t, \tau) \varphi(t+\tau) = \eta_1(t) \eta_2(\tau) \varphi(t+\tau) \text{ при } \rho \rightarrow +\infty$$



Действительно $f = \eta_1 \cdot f$, $g = \eta_2 \cdot g$
 $(f * g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(t) \cdot g(\tau), \eta_k(t, \tau) \varphi(t + \tau)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\eta_1(t) \cdot \eta_2(\tau) \varphi(t + \tau))$
 $= (f(t) \cdot g(\tau), \eta_1(t) \cdot \eta_2(\tau) \varphi(t + \tau))$
 или, что $f * g = 0$ при $t < 0$
 Алгебра наз. интегральной, на которой определена
 внутренняя операция (умножение), которая вл. ассоциативна
 $D'_+(R^1)$ вл. алгебра скалярн. алгебра с 1)

Уравнения в свёрточной алгебре

$a * u = f$, $a, f \in D'_+(R^1)$

Если существует решение уравнения $a * u = \delta$, то и найдем фундаментальное решение оператора $a *$.

Решение этого уравнения обозн. $a^{-1} \in D'_+(R^1)$

Если a^{-1} $\exists$, то $a * a^{-1} = a^{-1} * a = \delta$

Теорема: Если $\exists a^{-1} \in D'_+(R^1)$, то $\forall f \in D'_+(R^1)$ решение уравнения $a * u = f$ в $D'_+(R^1)$ существует, единственно и

выражается формулой $u = a^{-1} * f$

До-во: $\exists \exists a^{-1}$. Тогда $a^{-1} * f \in D'_+(R^1)$. Покажем, что это

р-ние удовл. ур-нию $a * u = f$.

$$a * (a^{-1} * f) = (a * a^{-1}) * f = \delta * f = f$$

Единственность: $a * u_0 = 0$ покажем, что $u_0 = 0$

$$a^{-1} * (a * u_0) = (a^{-1} * a) * u_0 = \delta * u_0 = u_0 = a^{-1} * 0 = 0$$

Вывод: Решение уравнения $a * u = f$ в свёрточной алгебре D'_+ сводится к решению уравнения $a * u = \delta$, т.е. к нахождению функ. р-ии свёрточного оператора $a *$.

Примеры

Свёртки с простыми и двойными скобками

$\mu \delta_s$ - простая скобка с точн. μ , $(\mu \delta_s, \varphi) = \int_s \mu \varphi ds$

$$-\frac{\partial}{\partial n}(\nabla \delta s) - \text{двухкой мост } (-\frac{\partial}{\partial n}(\nabla \delta s), \varphi) = \int \nu(x) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

поверхностный потенциал

$$V_3^{(0)} = \frac{1}{|x|} * \mu \delta s, \quad V_2^{(0)} = \ln \frac{1}{|x|} * \mu \delta s - \text{поверхн. пот. в плоск. сл.}$$

$$V_3^{(1)} = -\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n}(\nabla \delta s), \quad V_2^{(1)} = -\ln \frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n}(\nabla \delta s) -$$

- поверхностный потенциал двойного слоя

// Фунг. решение свертки потенциалом

// и еще учиться в лекциях на этом курсе

// в задаче нужно было еще отметить, почему это у

// нас все просто

$$V_3^{(0)} = \int \frac{\mu(y)}{|x-y|} ds_y$$

$$V_3^{(1)}(x) = \int \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} ds_y$$

$$V_2^{(0)} = \int \mu(y) \ln \frac{1}{|x-y|} ds_y$$

$$V_2^{(1)}(x) = \int \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} ds_y$$

26.11.15

Примеры свертки

$$V_3^{(1)} = -\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n}(\nabla \delta s) - \text{поверхностный потенциал}$$

$$V_3^{(1)} = \int \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} ds_y - \text{докажем эту формулу}$$

(аналогично аналогично)

Ф-во: $(V_3^{(1)}, \varphi) = -(\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n}(\nabla \delta s), \varphi) = \text{теор. о свертке с функцией Фей} =$

$$= -(\frac{\partial}{\partial n}(\nabla \delta s)(y)) \cdot \frac{1}{|z|}, \quad \eta(y) \varphi(y+z) = \text{применяем } = -(\frac{\partial}{\partial n}(\nabla \delta s))(y),$$

$$\eta(y) (\frac{1}{|z|}, \varphi(y+z)) = \int \text{в } \mathbb{R}^3 \text{ локальный переход } \dots \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|z|} \text{ будет интегрируемой } \int = 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} - \text{как и мы } \int =$$

$$= \int \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left[\eta(y) \int \frac{\varphi(z+y)}{|z|} dz \right] ds_y = \int \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left[\eta(y) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(y+z)}{|z|} dz \right] ds_y$$

$$= \int \nu(y) \text{ обратн. в нуль вблизи } s \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} \eta(y) = 0 \int =$$

$$= \int \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \int \frac{\varphi(x)}{|x-y|} dx ds_y \quad \textcircled{=}$$

Функция свертки интегралов Вейера:
 $I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|x-y|^\alpha} dx dy$, $G \in \mathbb{R}^n$, $\rho(\alpha)$ - мерная
 мера $I(\alpha) \in \mathbb{R}$, где ρ - наибольшее число, удовл. неравенству
 $d-1, n-3 \Rightarrow I(\alpha) \in \mathbb{C}^1$ и можно
 дифференцировать по знакам интеграла $\Rightarrow$
 $V_0^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|} dx dy$. меньше порядок интеграла
 $V_0^{(2)} = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^2} dx dy$

Примеры свертки
 Кольчатой потенциальной

$$V_0 = \frac{1}{|x|} * \rho$$

$$V_2 = \ln \frac{1}{|x|} * \rho$$

ρ -мощность

Если ρ -функция, то свертка $\exists$ и удовл. уравн Пуассона

$$\Delta V_2 = \Delta (\ln \frac{1}{|x|} * \rho) = \Delta \ln \frac{1}{|x|} * \rho$$

Вычисляем $\Delta \ln |x|$ при $n=2$

покажем, что при $x \neq 0$ $\Delta \ln x = \{ \Delta \ln x = 0 \}$ (классическая краевая)

$\Delta \ln |x| = \{ \text{оператор Лапласа, в полярн. координатах} \} =$

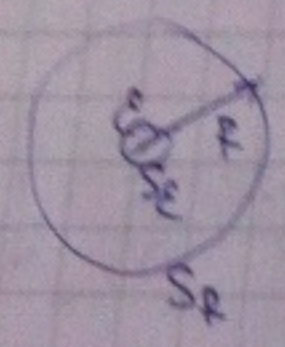
$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \text{классическая краевая}$$

этой функ. $= 0$ везде, кроме $x=0$

формула Грина: $\int (\varphi \Delta f - f \Delta \varphi) = \int \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds$

$$\int_{\text{окр. окр.}} (\Delta \ln |x|, \varphi) = (\ln |x|, \Delta \varphi) = \int_{\text{окр. окр.}} \text{supp } \varphi \subset U_R \} =$$

$$= \int_{U_R} \ln |x| \Delta \varphi dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < R} \varphi \Delta \ln x dx + \left(- \int_{S_\epsilon} + \int_{S_R} \right) \left(\ln |x| \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \ln |x|}{\partial n} \right)$$



$= \int \varphi$ на S_R обрам. в ноль, т.е. $\text{supp } \varphi \subset U_R \} =$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left(- \ln |x| \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varphi \frac{1}{|x|} \right) ds =$$

$\rightarrow 0$, т.е. $\epsilon \cdot \ln \epsilon \rightarrow 0$ как $\epsilon \rightarrow 0$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{S_\epsilon} \varphi ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_\epsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) ds + 2\pi \varphi(0) \right) = \int \varphi(x) - \varphi(0) = f(x) \cdot \epsilon$$

$$= 2\pi \varphi(0) = (2\pi \delta, \varphi)$$

Поэтому считаем, что $\Delta \ln|x| = 2\pi\delta(x)$
 Аналогично считаем: $\Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi\delta(x)$

В общем случае $n > 3$

$\Delta \frac{1}{|x|^{n-2}} = -(n-2)\sigma_n\delta(x)$, где σ_n - площадь единичной n -мерной сферы, $\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$

$$\Delta V_2 = \Delta \left(\ln \frac{1}{|x|} * \rho \right) = \Delta \ln \frac{1}{|x|} * \rho = 2\pi\delta * \rho = 2\pi\rho - \text{уровн. ур. Пуассона}$$

05.12.13
 лекция 11

Обобщённые функции медленного роста

Введём пр-во основных функций - пр-во Шварца

Функция принадлежит пр-ву Шварца, S_∞ , если она принадлежит пр-ву $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и вместе со всеми своими производными убывает на бесконечности быстрее любой степени $|x|$.

$$f \in S_\infty \quad \exists C_{q,p} : |x^q D^p f(x)| < C_{q,p}$$

Введём сходимость в S_∞ :

Последовательность $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in S_\infty$ сходится к нулю, если

$$x^q D^p \varphi_k \rightarrow 0 \quad \forall q, p$$

Замечание: Из сходимости в D следует сход. в S_∞ (наоборот нет)

Можно ли сказать, что множество $S_\infty \supset D$ существует?

Как мн-во ф-ий из D из S_∞ да. А является ли D подпр-вом пр-ва S_∞ ? Т.е. если ск-е в S_∞ , то ск. в D $\leftarrow$ нет $\rightarrow$ нет

Чем шире пр-во основных ф-ий, тем уже пр-во обобщённых ф-ий.

Пространство Шварца над S_∞ с учётом введенной на нём сходимости.

Опр: Пространство обобщённых функций медленного роста называется мн-во линейных непрерывных функционалов над S_∞ .

это для

$$F(p) = \int e^{ixp} f(x) dx, \quad f(x) - \text{финитн.} \quad F(p) \text{ не будет фин.}$$

Свойство

Д. введенные всюду непрерывны в S_∞ , т.к. $\forall \varphi \in S_\infty$ найдется номер $k \in \mathbb{N}$, $x = 1, 2, \dots$: $\varphi_k \rightarrow \varphi, x \rightarrow \infty$ в S_∞ .
 $\varphi_k(x) = \varphi(x) \eta(\frac{x}{k}), \eta \in D, \eta(x) = 1, |x| < 1$

Правило умножения на ф-ии из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$
 $f \in D'(\mathbb{R}^n), g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$
 В кр-ве Шварца неверно $e^{-1/x^2} \cdot e^{x^3} \notin S'_\infty$

класс Θ_m

Θ_m - мн-во функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, растущих на бесконечности быстрее полинома
 $|\partial^\alpha a(x)| < C_\alpha (1+|x|)^{m(\alpha)}$

где некоторых $(C_\alpha, m(\alpha))$

Свойство: умножение на ф-ии из Θ_m
 Операция умножения на ф-ию из Θ_m действует непрерывно
 из $S_\infty \rightarrow S_\infty$
 $\varphi_k \rightarrow 0$ в $S_\infty \Rightarrow |x^p \partial^\alpha a(x) \varphi_k| \Rightarrow 0$

Лемма Шварца. Для того, чтобы линейная функционал f опред. на S_∞ принадле. S'_∞ необходимо и достаточно, чтобы $\exists C > 0$ и целое $p \geq 0$: $|f(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_p$

$\forall \varphi \in S_\infty, \text{ где } \|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha| \leq p, x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^p |\partial^\alpha \varphi(x)|$

Док-во: необходимость достаточность

Пусть $f \in S'_\infty$, докажем, что $\exists C > 0$ и $p \geq 0$.

Пусть f удовл. нер-ву при нек. $C > 0$ и $p \geq 0$
 докажем, что $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi_k \rightarrow 0$ в $S_\infty(\mathbb{R}^n)$

Пока $\|\varphi_k\|_p \rightarrow 0 \Rightarrow |f(\varphi_k)| \leq C \|\varphi_k\|_p \rightarrow 0$ f - непрерыв. ф-ан
 необходим

Пусть $f \in S'_\infty$

$\exists C > 0, p \geq 0: \forall \varphi \in S \quad |f(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_p$. От противного

таких чисел $\nexists \Rightarrow \exists \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ из $S_\infty: |f(\varphi_k)| > k \|\varphi_k\|_p$

найдётся

обозн. $\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k}$, $k=1,2,\dots$

Эта послед. сход. к 0 в S_∞ , т.к. при $k \geq |d|$ и $k \geq |\beta|$

$$|x^\beta \partial^\alpha \psi_k(x)| = \frac{|x^\beta \partial^\alpha \varphi_k(x)|}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$|x^\beta \partial^\alpha \varphi_k(x)| \leq \sup_{|d| \leq k} (1+|x|)^k |\partial^\alpha \varphi_k(x)|$$

Следовательно $\psi_k \rightarrow 0$ в S_∞ , т.к. ℓ -норм. ф-ии

$(\ell, \psi_k) \rightarrow 0$. По предположению $|(\ell, \varphi_k)| \geq k \|\varphi_k\|_k \Rightarrow$

$$|(\ell, \psi_k)| \geq \frac{1}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k} |(\ell, \varphi_k)| \geq \frac{1}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k} \frac{1}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k}$$

$$\geq \frac{k \|\varphi_k\|_k}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k} = \sqrt{k} \text{ противоречие}$$

16
17

Теор. Шварца (о структуре обобщённой ф-ии с точечными носителями)

н-во

Если носитель обобщ. функции $\ell \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ — вкл. точка 0, то она имеет единств. представление в виде

$$\ell(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x)$$

Д-во:

ℓ — носитель, тогда $\ell = \eta(kx) \ell$, где $\eta \in D$ и $\text{supp } \eta \subset U_k$

$\eta = 1$ в нек. окр. 0

Докажем для $\mathbb{R}^1$

$$\exists c > 0, m > 0 \quad |(x^N \ell, \varphi)| = |(\ell, x^N \eta(kx) \varphi)| \leq c \|x^N \eta(kx) \varphi(x)\|_m, \varphi \in S$$

10.12.13 вспомним $\uparrow$

лекция 12

$\eta(x) = 1$ в нек. окрестности нуля. ℓ — носитель

имеет в шаре радиуса 1. $\|\varphi\|_m = \sup_{|\alpha| \leq m} (1+|x|)^m |\partial^\alpha \varphi(x)|$

$$|(x^N \ell, \varphi)| = |(\ell, x^N \eta(kx) \varphi)| \leq c \|x^N \eta(kx) \varphi(x)\|_m$$

$$N = m+1$$

$$\|x^{m+1} \eta(kx) \varphi(x)\|_m = \sup_{|\alpha| \leq m} (1+|x|)^m |\partial^\alpha x^{m+1} \eta(kx) \varphi(x)|$$

$$|\partial^\alpha x^{m+1} \eta(kx) \varphi(x)| < \frac{C}{k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{m+1} \eta(kx) \varphi(x)\|_m = 0$$

$$x^{m+1} f = 0$$

Покажем, что

$$f = \sum_{k=0}^m c_k \delta^{(k)}(x)$$

$$\forall \varphi \in S, k=1, \dots, m$$

$$= (-1)^k (x^{m+1} \varphi)^{(k)}|_{x=0} = 0$$

$$\text{Вывод: } x^{m+1} \delta^{(k)} = 0, k=1, \dots, m$$

Покажем единственность

$$\sum_{|k|=0}^m (c_k - c'_k) \delta^{(k)}(x) = 0$$

$$0 = (\sum_{|k|=0}^m (c_k - c'_k) \delta^{(k)}(x), \varphi) = \sum_{|k|=0}^m (-1)^{|k|} (c_k - c'_k) (\delta(x), \partial^k \varphi)$$

$$= (-1)^{\beta} \beta! (c_{\beta} - c'_{\beta}) \Rightarrow c_{\beta} = c'_{\beta} \text{ и так } \forall \beta, |\beta| \leq m$$

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^m c'_k \delta^{(k)}(x) - \text{другое представление}$$

$$k \cdot x^{\beta}, |\beta| \leq m$$

$$= \sum_{|k|=0}^m (-1)^{|k|} (c_k - c'_k) (\delta(x), \partial^k \varphi)$$

$$= (-1)^{\beta} \beta! (c_{\beta} - c'_{\beta}) \Rightarrow c_{\beta} = c'_{\beta} \text{ и так } \forall \beta, |\beta| \leq m$$

Преобразование Фурье обобщённых функций

линейного роста

$$\varphi \in S$$

$$F[\varphi] = \int \varphi(x) e^{i(z, x)} dx, (z, x) = z_1 x_1 + \dots + z_n x_n$$

Формулы

$$\partial^{\alpha} F[\varphi](z) = F[(ix)^{\alpha} \varphi(x)](z)$$

В физике что-то подобное называется квантованием

$$F[\partial^{\alpha} \varphi] = (-iz)^{\alpha} F[\varphi](z)$$

$$z^{\beta} \partial^{\alpha} F[\varphi](z) = z^{\beta} [F[(ix)^{\alpha} \varphi(x)]] = i^{|\alpha|+|\beta|} F[\partial^{\alpha} (x^{\beta} \varphi(x))]$$

$$|z^{\beta} \partial^{\alpha} F[\varphi](z)| \leq \int |\partial^{\alpha} (x^{\beta} \varphi(x))| dx < C_{\beta, \alpha}$$

$$F[\varphi] \in S, F: S \rightarrow S$$

Вспомогательное преобр. Фурье

$$\varphi(x) = F^{-1}[F[\varphi]](x) = F[F^{-1}[\varphi]](x)$$

$$F^{-1}[\psi] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(z) e^{-i(x, z)} dz = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi](-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(-z) e^{i(x, z)} dz$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-z)](x)$$

Выводим ли $F: S \rightarrow S$ непрерывными операторами?

Лемма: Преобразование Фурье в S является непрерывными операторами

Док-во: $\varphi_k \rightarrow 0$ в S

$$|z|^p \partial^\alpha F[\varphi_k](z) \leq \int |\partial^\alpha (x^\alpha \varphi_k(x))| dx \leq$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (x^\alpha \varphi_k)(1+|x|)^{-n} \int \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}}| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty$$

$$F[\varphi_k] \rightarrow 0 \quad \forall \alpha$$

Преобразование Фурье обобщенных функций

$$F[f](z) = \int f(x) e^{i(z,x)} dx, \quad |F[f](z)| \leq \int |f(x)| dx$$

$$(F[f], \varphi) = \int F[f](z) \varphi(z) dz$$

$$\int F[f](z) \varphi(z) dz = \int \left(\int f(x) e^{i(z,x)} dx \right) \varphi(z) dz = \int f(x) \left(\int \varphi(z) e^{i(x,z)} dz \right) dx =$$

$$= \int f(x) F[\varphi](x) dx = (f, F[\varphi])$$

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi])$$

научим для регулярной ф-ии

Опр: Преобр. Фурье функции $f \in S'$ наз. преобразование, определенное следующим равенством.

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]) \quad \forall \varphi \in S.$$

Покажем, что преобр. Фурье само является обобщ. ф-ей, т.е. $F[f] \in S'$

Очевидно, что $F[f]$ линейный функционал. Покажем его непрерывность. Пусть $\varphi_k \rightarrow 0$ в S , то $\forall \varphi \in S$ научим

$(f, F[\varphi_k])$ - л. ф-ия. Покажем, что при $k \rightarrow \infty$ $(f, F[\varphi_k]) \rightarrow 0$ вернее $(F[f], \varphi_k) \rightarrow 0$.

$$(f, F[\varphi_k]) = (F[f], \varphi_k) \rightarrow 0$$

при условии, что $\varphi_k \rightarrow 0$ в S выкажем $(F[f], \varphi_k) \rightarrow 0 \Rightarrow$

$F[f]$ - непр. функционал

Вывод: $F: S' \rightarrow S'$

Утв: F непрерывно действует в пр-ве S'

Д.т.т. $\varphi_k \rightarrow 0$ в S' . Тогда $\forall \varphi \in S$ $(F[\varphi_k], \varphi) = (\varphi_k, F[\varphi]) \rightarrow 0$

Обратное преобразование Фурье обобщенных ф-ий

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)]$$

Докажем, что $F^{-1}[F[f]] = f$, $F[F^{-1}[f]] = f$.

$$\begin{aligned} (F^{-1}[F[f]], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[F[f]](-z), \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f](z), F[\varphi](-z)) \\ &= (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) = (f, \varphi) \\ &= (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F[F^{-1}[f]], \varphi) \quad \square \end{aligned}$$

14.12.13
лекция 13

Свойства преобразования Фурье
Обобщенных функций непрерывного роста.

Ранее: если $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, то преобр-е Фурье этой функции:

$$(F[f](p), \varphi(p)) = (f(x), F[\varphi](x)), \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Покажем, что $F[\varphi](x) \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$ это определение корректно. И
покажем, что так определенную функцию $F[f]$ есть обобщ. ф-ция из S' .

Пример:

$$F[\delta(x-x_0)](z) = e^{i(z, x_0)} \quad \text{Докажем:}$$

$$\begin{aligned} (F[\delta(x-x_0)], \varphi) &= (\delta(x-x_0), F[\varphi](x)) = F[\varphi](x_0) = \int \varphi(z) e^{i(z, x_0)} dz = \\ &= (e^{i(z, x_0)}, \varphi(z)) \quad \text{и это интегральная ОФ} \quad \square \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F[\delta(x)] = 1 \Rightarrow \delta(x) = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1] \Rightarrow \int 1 e^{i(x, z)} dz -$$

единичная ОФ (т.е. расх-во сам по себе) (это надо понимать как ОФ)

Пример:

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(z)$$

Свойство:

$$\forall f \in S'(\mathbb{R}^n) \quad \text{тогда} \quad \partial^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f(x)]$$

$$\delta: F[\partial^\alpha \varphi] = (-ix)^\alpha F[\varphi], \quad \varphi \in S \text{ - из мат анализа} \Rightarrow$$

$$(\partial^\alpha F[f], \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (F[f], \partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, F[\partial^\alpha \varphi]) = (-1)^{|\alpha|} \cdot$$

$$(f, (-ix)^\alpha F[\varphi]) = ((ix)^\alpha f, F[\varphi]) = (F[(ix)^\alpha f(x)], \varphi) \quad \square$$

Примеры:

$F[x^\alpha]$ - (как ОФ, т.к. обобщенная ф-ция δ) $\Rightarrow$ по упр. св. вы.

$$F[x^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha F[1] \quad (\text{т.к. } F[(ix)^\alpha] = \partial^\alpha F[1] = (2\pi)^n \partial^\alpha \delta(z))$$

$$\Rightarrow i^{|\alpha|} F[x^\alpha] = (2\pi)^n \partial^\alpha \delta(z), \quad \frac{1}{(-i)^{|\alpha|}} F[x^\alpha] = (2\pi)^n \partial^\alpha \delta(z)$$

$$F[x^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} (2\pi)^n \partial^\alpha \delta(z)$$

Свойство:

$$F[\varphi](z) = (-iz)^n F[\varphi](z) \quad (\text{это следует из того, что } \partial^n F[\varphi] = F[(iz)^n \varphi(x)], \varphi \in S - \text{из леммы})$$

Свойство. Преобразование Фурье сдвига

$$F[\varphi(x-x_0)](z) = e^{i(x_0, z)} F[\varphi](z)$$

$$\begin{aligned} \Phi: (F[\varphi(x-x_0)](z), \varphi(z)) &= (\varphi(x-x_0), F[\varphi](x)) = (\varphi(x), F[\varphi](x+x_0)) = \\ &= \{ \text{но сдвиг при обмене } \varphi \in S \} = (\varphi(x), F[\varphi(z) e^{i(x, z)}]) = \\ &= (F[\varphi](z), \varphi(z) e^{i(x_0, z)}) = (e^{i(x_0, z)} F[\varphi](z), \varphi(z)) \end{aligned}$$

Свойство:

$$F[\varphi](z+z_0) = F[e^{i(z_0, x)} \varphi(x)](z)$$

$$\begin{aligned} \Phi: (F[\varphi](z+z_0), \varphi(z)) &= (F[\varphi](z), \varphi(z-z_0)) = (\varphi(x), F[\varphi](z-z_0)) = \\ &= \{ \text{сдвиг при обмене } \varphi \in S \} = \int \varphi(z-z_0) e^{i(z, x)} dz = \\ &= \int \varphi(z) e^{i(z+z_0, x)} dz = (\varphi(x), F[e^{i(z_0, x)} \varphi(z)]) = (e^{i(z_0, x)} F[\varphi](z), \varphi(z)) \end{aligned}$$

Опр: $\varphi \in S'(\mathbb{R}^{2n}), \varphi \in S(\mathbb{R}^{2n})$

переносимое свойство Фурье по x: $(F_x[\varphi(x, y)](x, y), \varphi(x, y)) =$

$$= (\varphi(x, y), F_y[\varphi(x, y)](x, y)) \quad // \text{переносимое по частоте переменных}$$

Свойство. Преобразование Фурье полного выражения

$f \in S'(\mathbb{R}^n), g \in S'(\mathbb{R}^m)$ полное

$$\begin{aligned} \star F[f(x) \cdot g(y)] &= F_x[f(x) \cdot F[g](y)] = F_y[F[f](z) \cdot g(y)] = \\ &= F[f](z) \cdot F[g](y) \end{aligned}$$

полное выражение

б. $\varphi(z, y) \in S(\mathbb{R}^{n+m})$

$$\star (F[f(x) \cdot g(y)], \varphi) = (f(x) \cdot g(y), F[\varphi](x, y)) = (f(x), (g(y), F[\varphi](x, y)))$$

$$F[\varphi](x, y) = (f(x), (g(y), F_y F_z[\varphi](x, y))) = (f(x), (F_y[g](y), F_z[\varphi](x, y)))$$

$$F_z[\varphi](x, y) = (f(x), F_y[g](y), F_z[\varphi](x, y)) =$$

$$= (F_x[f(x) \cdot F_y[g](y)], \varphi(z, y)) = (F[g](y), (f(x), F[\varphi](x, y)))$$

$$= (F[g](y), (F[f](z), \varphi(z, y))) = (F[f](z) \cdot F[g](y), \varphi(z, y))$$

Теорема: Если f -функция обобщенная функция, то преобразование Фурье принадлежит классу $\mathcal{E}_M'(\mathcal{E}_M \subset C^\infty(\mathbb{R}^n))$

достаточно ввести со всеми свойствами функции η и ψ (некотор. наикомо) и иметь представление $F[\varphi] = (f(x), \eta(x) \in C(\mathbb{R}^n), \eta(x) \in D(\mathbb{R}^n), \eta(x) = 1$ в некоторой окрестности $\text{supp } \varphi$.

Д. 1) Если $\eta \in C^\infty$ то

$$\begin{aligned} \Delta (F[\varphi], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (F[\varphi], \partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, F[\partial^\alpha \varphi]) = (f, \eta(x) (-ix)^\alpha \varphi(x)) \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f, \eta(x) (-ix)^\alpha F[\varphi](x)) = (f(x), \int \eta(x) (-ix)^\alpha \varphi(z) e^{i(x,z)} dz) \\ &= \int \eta(x) (-ix)^\alpha \varphi(z) e^{i(x,z)} dz = \int (f(x), \varphi(x, y)) dy \quad \forall \varphi \in D \text{ или } \varphi \in S \end{aligned}$$

но $\int \eta(x) (-ix)^\alpha \varphi(z) e^{i(x,z)} dz = \int (f(x), \eta(x) (-ix)^\alpha \varphi(z) e^{i(x,z)}) dz = \int (f(x), \eta(x) (-ix)^\alpha \varphi(z) e^{i(x,z)}) dz \rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta F[\varphi] = \varphi = \int (f(x), \eta(x) (-ix)^\alpha \varphi(z) e^{i(x,z)}) dz \rightarrow$$

$$\Delta F[\varphi](z) = (f(x), \eta(x) (-ix)^\alpha e^{i(x,z)}) \quad \text{непр по } z \rightarrow \Delta F[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ где } \forall \alpha$$

$$\Rightarrow F[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

2) рассмотрим более наглядно (было н-во Шварца: $\eta \in C^\infty$ и $\eta(x) = 1$ в окрестности $\text{supp } \varphi$ и $\eta(x) = 0$ вдали от $\text{supp } \varphi$)

$|(\varphi, \eta)| \leq C \|\eta\|_p$, где $\|\eta\|_p = \sup_{|x| \leq p, x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^p |\eta(x)|$

f -оф-мн непр. ф-ции $\Rightarrow$

$$\Delta [F[\varphi]](z) = F(f(x), \eta(x) (-ix)^\alpha e^{i(x,z)}) \leq C \|\eta(x) (-ix)^\alpha e^{i(x,z)}\|_p$$

$$= C \sup_{\substack{|x| \leq p \\ x \in \mathbb{R}^n}} (1+|x|)^p \eta(x) x^\alpha e^{i(x,z)} \leq C_2 (1+|z|)^p$$

функция $\Rightarrow$ не растет по x , а по z не более чем p -й степеню

Преобразование Фурье свертки

10.02.14
лекция 1

$F[f * g] = F[f] \cdot F[g]$, где g -функция

Д-во: $(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \eta(y) \varphi(x+y)))$

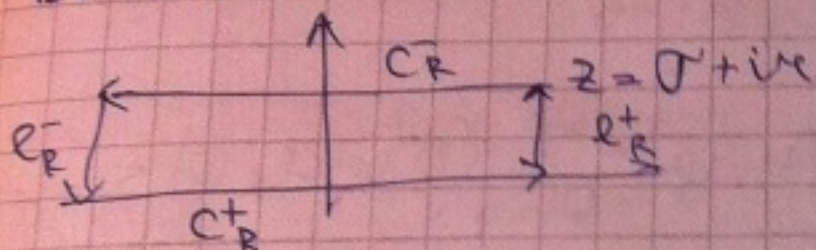
$$\begin{aligned} \eta(y) \in D, \eta(y) \text{ обращается в 1 в окрестности } \text{supp } g, \eta(y) \in D(\mathbb{R}^n) \\ (F[f * g], \varphi) = (f * g, F[\varphi]) = (f(x), (g(y), \eta(y) \int \varphi(z) e^{i(x+y)z} dz)) = \\ (F[g] = (g(x), \eta(x) e^{i(x,z)})) = (f(x), \int (g(y), \eta(y) e^{i(y,z)}) e^{i(x,z)} \varphi(z) dz) = \\ = (f(x), \int F[g](z) \varphi(z) e^{i(x,z)} dz) = (f, F[F[g]\varphi]) = (F[f], F[g]\varphi) = \\ = (F[f] F[g], \varphi) \end{aligned}$$

Пример: $F[e^{-d^2 x^2}](\zeta) = \frac{\sqrt{\pi}}{d} e^{-\zeta^2/4d^2}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F[e^{-d^2 x^2}](\zeta) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-d^2 x^2 + i\zeta x} dx = \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-(d^2 x^2 - i\zeta x)} dx = \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-\frac{d^2}{4} \left(x - \frac{i\zeta}{2d^2}\right)^2} d\left(x - \frac{i\zeta}{2d^2}\right) = \frac{1}{d} e^{-\frac{\zeta^2}{4d^2}} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-\frac{d^2}{4} z^2} dz = \frac{1}{d} e^{-\frac{\zeta^2}{4d^2}} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-\frac{1}{4} z^2} dz = \frac{1}{d} e^{-\frac{\zeta^2}{4d^2}} \sqrt{\pi}$$

Покажем, что $\int_{\mathbb{R}^1} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$

Вспомогательный ТФКП



$$C_R = C_R^+ \cup l_R^+ \cup C_R^- \cup l_R^-$$

$\int_{C_R} e^{-z^2} dz = 0$, т.к. область внутри контура не имеет полюсов.

контур обогн. C_R

$$l_R^\pm = \{0 \leq t \leq R, \theta = \pm \epsilon\}$$

$$|e^{-z^2}| = |e^{-\sigma^2 - 2i\sigma\epsilon - \epsilon^2}| = e^{-\sigma^2 - \epsilon^2} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{C_R^+} + \int_{C_R^-} \right) = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{C_R^+} + \int_{C_R^-} \right) e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz - \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-z^2} dz = 0$$

Обобщенные решения уравнений в частных производных.

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x), \quad f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$$

$$a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad D'(\mathbb{R}^n)$$

$$L(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$$

Уравнение $L(x, \partial) u = f(x) \quad (1)$

Опр: Обобщенное решение уравнения (1) — функция $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ будет выполнено

равенство $(L(x, \partial) u, \varphi) = (f, \varphi)$.

$$\mathbb{R}^3 \quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r)$$

$u \in C^m(\mathbb{R}^n)$ произв. ф-ии и порядок m существующий

классическим решением. Если $f - L(x, \partial)u = 0$ в области, решение равно нулю во всей области $\Rightarrow$ оно равно нулю в каждой точке (лемма Бойда-Романа)

Фундаментальное решение дифф. ур-ния в $\mathbb{R}^n$
 левост. транс. с пост. коэф.

$$L(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha, \text{ обзн. } L^*(\partial) = L(-\partial)$$

$$(L(x, \partial)u, \varphi) = (f, \varphi) \Rightarrow (u, L^*(x, \partial)\varphi) = (f, \varphi), \text{ где } L^*(x, \partial)\varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha(x) \varphi)$$

φ — проб. функ.

$$u \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

$$(L(x, \partial)u, \varphi) = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u, \varphi \right) = \sum_{|\alpha| \leq m} (a_\alpha \partial^\alpha u, \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, a_\alpha \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} (u, \partial^\alpha a_\alpha \varphi) = (u, L^*(x, \partial)\varphi)$$

Опр: Фунд. решение опер. L -ф-ции $\varepsilon \in D'(\mathbb{R}^n)$, $L\varepsilon = \delta$
 $\parallel (-\partial)^\alpha = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha$

Решение ε определено с точностью до $\ker L$
 лемма: для того, чтобы абст. ф-ция $\varepsilon \in S'(\mathbb{R}^n)$ была фунд. решением оператора $L \Leftrightarrow L(-iz)F[\varepsilon] = 1$, где

$$L(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha z^\alpha$$

б. Пусть $\varepsilon \in S'$ — фунд. реш. опер. $L(\partial)$. Применим преобр. Фурье к обеим частям рав-ва $L\varepsilon = \delta$

$$F[L(\partial)\varepsilon] = F[\delta] = 1$$

$$F[L(\partial)\varepsilon] = F\left[\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \varepsilon\right] = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha F[\partial^\alpha \varepsilon] = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (-iz)^\alpha F[\varepsilon] =$$

$$= L(-iz)F[\varepsilon]$$

$$F[L(\partial)\varepsilon] = L(-iz)F[\varepsilon] = 1$$

$P(z)X = 1$, $P(z)$ — полином степени m

$$X = \frac{1}{P(z)}$$

Мы бы хотели написать $P(z)$ обзн. как N_P

$N_P = \{z: P(z) = 0\}$. Если $N_P \neq \emptyset$, то решение не обзн. един.

Решение отыскивают по др-ли с носителями в N_p
 кет $P(z)$ состоит из др-ций, имеющих носители в N_p
 Пример: $zx=1$ $N_p=0$

$P \frac{1}{x}$ - др-ли Кохона

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + P \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta(x) + P \frac{1}{x}$$

11.02.14
 лекция 2

Фундаментальные решения дифференциальных
 уравнений

$L(\partial)$ -диф. оператор. $L(\partial)\varepsilon = \delta$ - функ. реш., $\varepsilon \in S'(\mathbb{R}^n)$
 $P(z)\hat{\varepsilon} = 1$ $\hat{\varepsilon} = \frac{1}{P(z)}$, $\varepsilon = F^{-1}\left[\frac{1}{P(z)}\right]$, $\frac{1}{P(z)} \in S'(\mathbb{R}^n)$

Теперь она будет кратко менять ответы
 Если $P(z) \neq 0$, то функ. решение существует.

$$F[\varepsilon] = \text{res } \frac{1}{L(-iz)}$$

// к общ. др-ции можно доба. др-ции, $\text{supp } \varepsilon \in N_p$
 $g \in S'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит к-бу $\text{res } \frac{1}{L(-iz)}$, если она предст. в виде
 $\frac{1}{L(-iz)} + f(z)$, где $\text{supp } f(z) \in N_p$

Ответ: $\varepsilon = F^{-1}\left[\text{res } \frac{1}{L(-iz)}\right] = (2\pi)^{-n} F\left[\text{res } \frac{1}{L(-iz)}\right]$

Решение однородных уравнений с
 постоянными коэффициентами

$$L(\partial)u = f(x), \quad f(x) \in D'(\mathbb{R}^n), \quad u \in D'(\mathbb{R}^n)$$

Метод: Пусть $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\exists f(x) * \varepsilon(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$

Тогда решение уравнения $L(\partial)u = f$ наход. по формуле
 $u = f * \varepsilon$, причем оно функ. в классе общ. др-ций
 которых существуют свертки.

Д.во: $L(\partial)(\varepsilon * f) = \sum_{|d|=0}^m a_d \partial^d (\varepsilon * f) = \left(\sum_{|d|=0}^m a_d \partial^d \varepsilon\right) * f =$
 $= (L(\partial)\varepsilon) * f = \delta * f = f$

Функ. Покажем, что $L(\partial)u = 0$ имеет функ. решение
 в классе всех функций, которые сворачиваются с ε . Пусть

u - решение одн. уравн. $u = u * \delta = u * (L(0)\delta) = (L(0)u) * \delta$

Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального оператора

$\epsilon = \Theta(t)z(t)$, где $z(t)$ - решение однород.

Покажем, что

$$Lz = z^{(m)} + a_1 z^{(m-1)} + \dots + a_n z = 0$$

$$z(0) = z'(0) = \dots = z^{(m-1)}(0) = 0, \quad z^{(m-1)}(0) = 1$$

$$D: f \in D(\mathbb{R}^n), \quad f(x) \in C^1(\mathbb{R}^1 | x_0) \quad \begin{cases} L\epsilon = 0, t < 0, \epsilon = 0 \\ \epsilon = 0, t > 0, \epsilon = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = f'(x) + [f]_{x_0} \delta(x - x_0)$$

используем правую часть расщ. как обобщенную ф-цию

$$[f]_{x_0} = f[x_0 + 0] - f[x_0 - 0]$$

$$\epsilon' = \Theta(t) z'(t) + \Theta'(t) z(t) = \Theta(t) z'(t), \quad \epsilon^{(m-1)} = \Theta(t) z^{(m-1)}(t)$$

$$\epsilon^{(m)} = \delta(t) + \Theta(t) z^{(m)}$$

$$L\epsilon = \epsilon^{(m)} + a_1 \epsilon^{(m-1)} + \dots + a_n \epsilon = \Theta(t) Lz + \delta(t) = \delta(t)$$

ϵ - фунд. решение оператора L .

Пример $\frac{d}{dt} + a = L \Rightarrow$ ед. фунд. реш. $\epsilon(t) = \Theta(t) e^{-at}$

опер. L из примера

$$\frac{d^2}{dt^2} + a^2$$

$$\epsilon(t) = \Theta(t) \frac{\sin at}{a}$$

Фундаментальное решение оператора теплопроводности

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - a^2 \Delta_x \epsilon = \delta(x, t)$$

$$F[\delta(x, t)] = F[\delta(x) \cdot \delta(t)] = 1$$

$$\delta(x, t) = \delta(x) \cdot \delta(t)$$

$$F_x[\delta(x, t)] = F_x[\delta(x) \cdot \delta(t)] = F[\delta](z) \delta(t) = \delta(z) \cdot \delta(t)$$

Если не брать обобщ. ф-ции, то никаких функций

кроме кривых вводить не можем

$$F_x\left[\frac{\partial \epsilon}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t} F_x[\epsilon] \quad F[\Delta \epsilon] = -|z|^2 F_x[\epsilon]$$

$$\frac{\partial \hat{E}(z,t)}{\partial t} + a^2 |z|^2 \hat{E}(z,t) = \delta(z) \delta(t)$$

$$\hat{E}(z,t) = \Theta(t) \cdot e^{-a^2 |z|^2 t}$$

$$E(x,t) = F_3^{-1}[\hat{E}(x,t)] = \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^n} \int e^{-a^2 |z|^2 t - i(z,x)} dz = \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$$

$$\int e^{-x^2/4a^2 t} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

$$\Delta \frac{1}{r} = \delta(x) \quad \Delta \ln r = \delta(x) \quad n=2$$

Фундаментальное решение для оператора Лапласа

$$n=2 \quad \Delta E_n = \delta(x)$$

$$-|z|^2 F[E_n] = 1, \quad n=2 \quad F[E_n] = -\frac{1}{|z|^2}$$

$$(P \frac{1}{|x|^2}, \varphi(x)) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} dx$$

Об. 60:

$$F[P \frac{1}{|x|^2}](z) = -2\pi \ln(z) - C$$

$$(|z|^2 P \frac{1}{|z|^2}, \varphi) = (P \frac{1}{|z|^2}, |z|^2 \varphi) = \int_{|z|<1} \frac{|z|^2 \varphi(z) - |z|^2 \varphi(0)}{|z|^2} dz +$$

$$+ \int_{|z|>1} \frac{|z|^2 \varphi(z)}{|z|^2} dz = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(z) dz = f(1, \varphi)$$

$$F[E_2] = \text{res}[-\frac{1}{|z|^2}] = -P \frac{1}{|z|^2}$$

$$E_2(x) = F^{-1}[-P \frac{1}{|z|^2}] = -\frac{1}{4\pi^2} F[P \frac{1}{|z|^2}] = \frac{1}{2\pi} \ln|x| + C$$

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$$

$$E_3 = -\frac{1}{4\pi|x|}, \quad E_n = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{-n+2}$$

Д.02.14 24.02.14
лекция 3 лекция 3
повторение

Фундаментальное решение
Метод сдвига

1) Обыкновенный дифф. оператор $L(\partial)$

$$E(t) = \Theta(t) z(t), \text{ где } z(t) \text{ удовл. ур-нию } L(\partial) z(t) = 0$$

$L(\partial)$ - дифф. опер. порядка n

$$z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-2)}(0) = 0, \quad z^{(n-1)}(0) = 1$$

2) Фундаментальное решение оператора неинволюционности

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \Delta E = \delta(x,t); \quad E_n(x,t) = \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}; \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

Фундаментальное решение волнового оператора

$$\square_a \varepsilon = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - a^2 \Delta \varepsilon = \delta(x, t)$$

$$\varepsilon_1(x, t) = \frac{2a}{\pi} \Theta(a^2 t - |x|)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Theta(a^2 t - |x|)}{2\pi a^2 t^2 + |x|^2}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\Theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{\text{sat}}(x)$$

Оператор Лапласа

$$\Delta \varepsilon_n = \delta(x)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{4\pi|x|}, \quad \varepsilon_n = -\frac{1}{2\pi} \ln|x|$$

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{-n+2}, \quad n \geq 2$$

лем. сущая (где наход. обобщ. решения)

$$L(\partial, \partial_t)u = f(x) \cdot \delta(t), \quad f \in D'(\mathbb{R}^n)$$

$$L(\partial, \partial_t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial t} L_j(\partial) + L_0(\partial)$$

$L_0(\partial)$ - дифф. оператор по переменной x

Опр: Ф-ция $u \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ допускает представление в виде $\varphi(x) \cdot 1(t)$, $\varphi(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$, если $\forall$ базис. функции $\eta_k(t) \in D(\mathbb{R}^1)$, сходя. к 1 в $\mathbb{R}^1$ существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)) = (u, \varphi(x) \cdot 1(t))$$

$(u, \varphi(x) \cdot \eta_k(t))$ - мн. кенр. ф-ан $\forall k$
 $u_0 \in D'(\mathbb{R}^n)$

Пример: $\exists u(x, t)$ такая, что $\int |u(x, t)| dt$ - локально интегрируемая ф-ция в $\mathbb{R}^n$, тогда $u_0(x)$ удовлетворяет условию: $u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dt$

Ф: $u(x, t)$ лок. инт. в $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int u(x, t) \varphi(x) \eta_k(t) dx dt = \int u(x, t) \varphi(x) dt$$

$$= \int \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dt dx$$

Пример $u(x, t) = f(x) \cdot \delta(t), \quad f \in D'(\mathbb{R}^n)$

$$u_0 = f$$

$$(u_0, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \delta(t), \varphi(x) \eta_k(t)) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x), \varphi(x) \eta_k(t)) = (f, \varphi)$$

Теорема (метод сдвига) Если $u \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ является решением уравнения $L(\partial, \frac{\partial}{\partial t})u = f(x)\delta(t)$ и допускает представление, то функция $u_0 \in D'(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет уравнению $L_0(\partial)u_0 = f$

б. Пусть $\eta_k(t)$ - носим. из $D(\mathbb{R}^1)$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^1$ тогда $\eta_k(t) + \eta_k^\beta(t)$ имеют общ. носим. сходящаяся к 1
 $\lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k^\beta(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) [\eta_k + \eta_k^\beta]) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)) =$
 $= (u_0, \varphi) - (u_0, \varphi) = 0$

Покажем, что u_0 - реш. уравн. $L_0(\partial)u_0 = f$

$$\begin{aligned} (L_0(\partial)u_0, \varphi) &= (u_0, L_0(-\partial)\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, L_0(-\partial)\varphi(x)\eta_k(t)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u, L_0(-\partial)\varphi(x)\eta_k(t)) + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q L_q(-\partial)\varphi(x)\eta_k^\beta(t) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u, L(-\partial, \frac{\partial}{\partial t})\varphi(x)\eta_k(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (L(\partial, \frac{\partial}{\partial t})u, \varphi(x)\eta_k(t)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \delta(t), \varphi(x)\eta_k(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x), \varphi(x) \cdot \eta_k(t)) = (f, \varphi) \end{aligned}$$

26

Метод сдвига примен. для носим. функций

решений операторов

$$L(\partial, \frac{\partial}{\partial t})\delta = \delta(x) \cdot \delta(t) / f(x) = \delta(x)$$

Если δ допускает предст. δ_0 , то $(\delta_0, \varphi) = (\delta, \varphi(x) \cdot 1(t))$

03.03.14
лекция 4

Свойства фундаментальных решений

Если $u \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ явл. реш. уравнения $L(\partial, \frac{\partial}{\partial t})u = f(x) \cdot \delta(t)$ и допускает представление u_0 то u_0 явл. решением уравн. $L_0(\partial)u_0 = f$.

Пример: $u(x, t)$ - нек. интегр.

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dt$$

не будет подробно описывать то, как считать. 

Пример (применение лем. стусса) построение фундаментального решения оператора Лапласа. $n \geq 3$
 Ф.р. Опер. Лапласа. $E_n = \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4at}}$

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \Delta E = \delta(x, t)$$

$$E_0^n(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} E(x, t) dt = - \int_0^{\infty} \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4at}} dt$$

$u = \frac{|x|^2}{4t}$ замена

$$= - \frac{|x|^{-n+2}}{4\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-2} du = \left\{ \text{этоGamma-функция} \right\}$$

$$= - \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \frac{|x|^{-n+2}}{4\pi^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(n-2)\pi^n} |x|^{-n+2}$$

2.5

Свойства фундаментальных решений волнового оператора

Ф.р.

$$E_1(x, t) = \frac{1}{2a} \Theta(at - |x|), \quad E_2(x, t) = \frac{\Theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}$$

$$E_3 = \frac{\Theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{\text{Sat}}(x)$$

1) E_1, E_3 - лок. интегр. E_3 - сферич. обобщ. Ф-ция

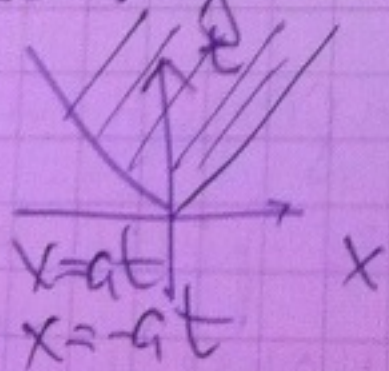
$$(E_3, \varphi) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \int_{\text{Sat}} \varphi(x, t) dS dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{\infty} \frac{a}{|x|} \int_{S(x)} \varphi(x, \frac{|x|}{a}) dS d\frac{|x|}{a} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{\infty} \int_{S(|x|)} \frac{\varphi(x, \frac{|x|}{a})}{|x|} dS d|x| =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x, \frac{|x|}{a})}{|x|} dx$$

Носители E_1, E_2 совпадают с замкнутой конусом

будущего



Носитель E_3 лежит на

E_1 t

at

$|x|$

E_2 t

at

x

$|x| = at$

E_3

at

x

Пусть $f(x,t) \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$, $\varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n)$. Введем операцию свертки

$$(f(x,t), \varphi(x)) \in D'(\mathbb{R}^1) \quad \forall \psi \in D(\mathbb{R}^1)$$

$$((f(x,t), \varphi(x)), \psi(t)) = (f, \varphi \cdot \psi) \quad \varphi \cdot \psi \in D(\mathbb{R}^{n+1})$$

Свертка

$$\left(\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k}, \varphi(x) \right) = \frac{d^k}{dt^k} (f(x,t), \varphi(x))$$

До: $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \psi(t) \in D(\mathbb{R}^1)$

$$\left(\frac{d^k}{dt^k} (f(x,t), \varphi(x)), \psi(t) \right) = (-1)^k (f(x,t), \varphi(x)), \frac{d^k \psi}{dt^k} =$$

$$= (-1)^k (f, \varphi(x) \cdot \frac{d^k \psi}{dt^k}) = \left(\frac{d^k f}{dt^k}, \varphi \psi \right) = \left(\left(\frac{\partial^k f}{\partial t^k}, \varphi(x) \right), \psi(t) \right)$$

Опр. Функция $f(x,t) \in \mathcal{D}'$ в обобщенном смысле, если $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ функция $(f(x,t), \varphi(x)) \in C^p(\mathbb{R}^1)$

Теорема: Функции $E_n(x,t)$, $n=1,2,3$ принадлежат классу $C^\infty(0, \infty)$ (в обобщ. смысле) и при $t \rightarrow +0$ имеют предельные соотношения

$$E_n(x,t) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial E_n(x,t)}{\partial t} \rightarrow \delta(x), \quad \frac{\partial^2 E_n(x,t)}{\partial t^2} \rightarrow 0 \quad \text{в } D'(\mathbb{R}^n).$$

До: $n=3, \varphi \in D(\mathbb{R}^3)$

$$(E_3(x,t), \varphi(x)) = \frac{\Theta(t)}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}} \varphi(x) ds = \frac{\Theta(t)t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(atx) ds \in C^\infty(0, \infty)$$

$$x = at \overset{S_1}{\int} ds = a^2 \int d\Omega$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Замечено

$$x = at \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = at \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = at \cos \varphi$$

$$\left(\frac{\partial E_3(x,t)}{\partial t}, \varphi(x) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(atx) ds \right) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(atx) ds +$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_1} \varphi(atx) ds \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

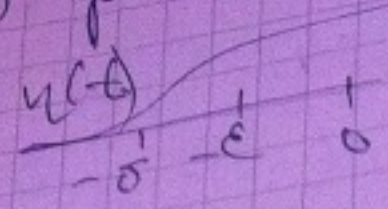
$$\left(\frac{\partial^2 E_3(x,t)}{\partial t^2}, \varphi(x) \right) = \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \left[\frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(atx) ds \right] = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_1} \varphi(atx) ds +$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \int_{S_1} \varphi(atx) ds \rightarrow 0$$

$$\int_{S_1} \varphi(atx) ds = \int_{S_1} \varphi(-atx) ds = I$$

9 теорема Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ такое, что $\text{supp } f \in \mathbb{R}^+$. Тогда $f \times g$ существует и является конуса дистрибутивом

$\frac{\partial}{\partial t}$ $D'(\mathbb{R}^{n+1})$ $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^{n+1})$.
 $(f \times g, \varphi) = (f(z, t) \cdot g(y, \tau), \eta(t) \eta(\tau) \eta(a^2 t^2 - |y|^2) \varphi(z, y, t, \tau))$
 $\eta(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ равно 0 при $t < \delta$ и 1 при $t > -\delta$
 где $\delta > \varepsilon > 0$



Волновое возмущение

17.03.14
 лекция 5
 Ф.1 $\varepsilon_1(x, t) = \frac{1}{2a} \Theta(at - |x|)$
 $\varepsilon_2(x, t) = \Theta(at - |x|) / 2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}$
 $\varepsilon_3 = \frac{\Theta(t)}{4\pi a^2} \delta_{\text{sat}}(x)$

- 1) Проверка св-ва $\varepsilon_n \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$
 $\varepsilon_n \in C^\infty(0, \infty)$ в обобщ. смысле
 $(\varepsilon_n(x, t), \varphi(x)) \in C^\infty(0, \infty)$
 $\varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n)$
 $\varepsilon_n(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$
 $\frac{\partial \varepsilon_n(x, t)}{\partial t} \rightarrow \delta(x), \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_n(x, t)}{\partial t^2} \rightarrow 0$

Волновое возмущение

Несущий $f(x, t) \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$, $f(x, t) = 0$ при $t < 0$
 $V_n = \varepsilon_n * f$ - волновое возмущение

- Свойство 1:
 $(V_n, \varphi) = (\varepsilon_n(y, \tau) \cdot f(z, t'), \eta(t) \eta(t') \eta(a^2 t^2 - |y|^2) \varphi(z, y, t, t'))$
 Свойство 2:
 Волновое возмущение непрерывно зависит от
 Свойство 3:

$$V_n(x, t) = 0 \text{ при } t < 0$$

Свойство 4:

Пусть f - скалярно-значущая.

$$V_0(x, t) = \int \frac{f(z, t - \frac{|x-z|}{a})}{|x-z|} dz$$

$$V_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int \frac{f(z, \tau) dz d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-z|^2}}$$

$$V_1(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau) dz d\tau$$

надо
знать,
что
это
есть,
чтобы
не
надо

д-во: $n=3$. $(\varepsilon_3, \varphi) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x, \frac{|x|}{a})}{|x|} dx$

$$(V_3, \varphi) = (\varepsilon_3(y, \tau), \eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \int f(z, \tau') \eta(\tau')$$

$$\cdot \varphi(y+z, \tau - \frac{|y|}{a} \tau') dz d\tau') = (\varepsilon_3(y, \tau), \eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \cdot$$

$$\cdot \int f(x-y, t-\tau) \varphi(x, t) dx d\tau) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\eta(\frac{|y|}{a}) \eta(0)}{|y|} \cdot$$

$$\parallel f(z, \tau) \eta(\tau) = f(z, \tau)$$

$$\cdot \int f(x-y, t - \frac{|y|}{a}) \varphi(x, t) dx d\tau \int dy = \frac{1}{4\pi a^2} \int \varphi(x, t) \cdot$$

$$\cdot \int \frac{f(x-y, t - \frac{|y|}{a})}{|y|} dy dx d\tau = \frac{1}{4\pi a^2} \int \frac{f(x-y, t - \frac{|y|}{a})}{|y|} dy$$

Поверхностные волновые потенциалы

$$f = u_1(x) \cdot \delta(\frac{t}{a}), f = u_0(x) \cdot \delta'(t), u_0(x), u_1(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$$

$$V_n^{(0)} = \varepsilon_n * [u_1(x) \cdot \delta(t)] \text{ поверхност. волновой}$$

потенциал плоского волн

$$V_n^{(0)} = \varepsilon_n * [u_0(x) \cdot \delta(t)] - \text{поверх. волновой потенциал}$$

равномерного волн

$$V_n^{(0)} = \varepsilon_n(x, t) * u_1(x)$$